MA093 – Matemática básica 2

Propriedades de matrizes. Matriz inversa

Francisco A. M. Gomes

UNICAMP - IMECC

Outubro de 2018

Tópicos importantes

O objetivo dessa aula é investigar

1. propriedades das operações com matrizes;
2. matrizes especiais;
3. matriz inversa.

Propriedades da soma e da multiplicação por escalar

Primeiras propriedades

Sejam A, B e C matrizes $m \times n$, e sejam u e v números reais.

a) $A + B = B + A$ (comutatividade)

b) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (associatividade)

c) $u(vA) = (uv)A$ (associatividade)

d) $u(A + B) = uA + uB$ (distributividade)

e) $(u + v)A = uA + vA$ (distributividade)

f) $A + 0 = A$, supondo que 0 é a matriz nula $m \times n$

g) $A + (-A) = 0$, em que 0 é a matriz nula $m \times n$

h) $1A = A$

Exemplo

Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, temos

$$
\begin{aligned}
2A - \frac{1}{2}A &= \left(2 - \frac{1}{2}\right) A && \text{propriedade distributiva} \\
&= \frac{3}{2}A && \text{simplificação} \\
&= \begin{bmatrix} \left(\frac{3}{2}\right) 2 & \left(\frac{3}{2}\right) 0 & \left(\frac{3}{2}\right) 3 \\ \left(\frac{3}{2}\right) 4 & \left(\frac{3}{2}\right)(-2) & \left(\frac{3}{2}\right) 1 \end{bmatrix} && \text{produto por escalar} \\
&= \begin{bmatrix} 3 & 0 & \frac{9}{2} \\ 6 & -3 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} && \text{Resultado}
\end{aligned}
$$

Propriedades da transposta

Mais propriedades

Sejam A e B matrizes $m \times n$, e seja c um número real.

a) $(A^T)^T = A$

b) $(c \cdot A)^T = c \cdot A^T$

c) $(A + B)^T = A^T + B^T$

Dadas $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 \\ -3 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ temos

$$(A + B)^T = A^T + B^T = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 6 & 1 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 6 & -1 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$$

Propriedades da multiplicação

Propriedades

Sejam A, B e C matrizes de dimensões compatíveis, e seja u um número real.

a) $A(BC) = (AB)C$ (associatividade)

b) $u(AB) = (uA)B = A(uB)$ (associatividade)

c) $A(B + C) = AB + AC$ (distributividade)

d) $(A + B)C = AC + BC$ (distributividade)

e) $(AB)^T = B^T A^T$ (transposição)

Exemplo

Sejam dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Observe que

$$AB = \begin{bmatrix} 13 & 8 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad BC = \begin{bmatrix} -18 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Assim, como prevê a propriedade (a) da multiplicação,

$$(AB)C = \begin{bmatrix} 13 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \end{bmatrix} = 9$$

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -18 \\ 9 \end{bmatrix} = 9$$

Exemplo

Sejam dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Observe que

$$AB = \begin{bmatrix} -8 \\ -18 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad (AB)^T = \begin{bmatrix} -8 & -18 \end{bmatrix}$$

Por outro lado,

$$B^T A^T = \begin{bmatrix} 2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -18 \end{bmatrix},$$

como previsto pela propriedade (e) da multiplicação.

O produto de matrizes é comutativo?

Atenção

Em geral,

$$AB \neq BA$$

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$AB = 6 \cdot 4 + 5 \cdot (-1) - 2 \cdot 3 \ = \ 13$$

$$BA = \begin{bmatrix} 24 & 20 & -8 \\ -6 & -5 & 2 \\ 18 & 15 & -6 \end{bmatrix}$$

Matriz identidade

Definição

A matriz identidade de ordem $n \times n$ é definida por

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

- Se a matriz A é $m \times n$, então

$$A \cdot I_n = I_m \cdot A = A$$

- A matriz identidade é sempre quadrada.

Matriz inversa

Definição

Seja A uma matriz $n \times n$ (quadrada). Definimos a inversa de A, caso exista, como a matriz A^{-1} (também $n \times n$) tal que

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

Quando A^{-1} existe, dizemos que A é inversível, ou não singular.

Matriz inversa

Problema

Mostrar que $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{10} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$ é a inversa de $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 \cdot \frac{2}{5} + (-1) \cdot (-\frac{1}{5}) & 2 \cdot \frac{1}{10} + (-1) \cdot \frac{1}{5} \\ 2 \cdot \frac{2}{5} + 4 \cdot (-\frac{1}{5}) & 2 \cdot \frac{1}{10} + 4 \cdot \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot A = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \cdot 2 + \frac{1}{10} \cdot 2 & \frac{2}{5} \cdot (-1) + \frac{1}{10} \cdot 4 \\ -\frac{1}{5} \cdot 2 + \frac{1}{5} \cdot 2 & -\frac{1}{5} \cdot (-1) + \frac{1}{5} \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obtenção da inversa

Método para a obtenção de A^{-1}

Para obter a inversa de A

1. Montamos a matriz ampliada $M = [\, A \mid I \,]$

2. Aplicamos operações sobre as linhas da matriz ampliada até convertermos A em I. Ou seja, fazemos

$$[\, A \mid I \,] \longrightarrow [\, I \mid A^{-1} \,].$$

   Convertemos uma coluna de A de cada vez, da esquerda para a direita (começando na coluna 1 e acabando na n).

3. A inversa de A é a matriz que aparece do lado direito da nova matriz ampliada.

Exemplo

Problema

Obter a inversa de $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$.

1. Montando a matriz ampliada:

$$M = \left[\begin{array}{rr|rr} 2 & 6 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

2. Convertendo o elemento m_{11} em 1: $\ell_1 \leftarrow \ell_1/2$

$$\left[\begin{array}{rr|rr} 2 & 6 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 3 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

3. Convertendo o elemento m_{21} em 0: $\ell_2 \leftarrow \ell_2 + \ell_1$

$$\left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 3 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 3 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right]$$

Exemplo

Matriz ampliada atual $M = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right]$

4. Convertendo o elemento m_{22} em 1:
   Desnecessário, pois o elemento já vale 1.

5. Convertendo o elemento m_{12} em 0: $\ell_1 \leftarrow \ell_1 - 3\ell_2$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|rr} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right]$$

A inversa de A é $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$

Conferindo: $A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Outro método para a obtenção da inversa

Método alternativo para a obtenção de A^{-1}

Para obter a inversa de A, supondo que ela seja 3×3:

1. Criamos a matriz $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

2. Montamos o sistema $A \cdot A^{-1} = I$, ou seja

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Resolvemos o sistema, encontrando a, b, c, d, e, f, g, h e i.

Exemplo

Problema

Obter a inversa de $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$.

1. Montando o sistema linear:

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Efetuando a multiplicação:

$$\left\{ \begin{array}{rrcl} 2a & +6c & = & 1 \\ -a & -2c & = & 0 \\ 2b & +6d & = & 0 \\ -b & -2d & = & 1 \end{array} \right.$$

Exemplo

3. Resolvendo o sistema linear:

$$a = -1,\ b = -3,\ c = \frac{1}{2},\ d = 1.$$

A inversa de A é $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$

Conferindo: $A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Propriedades da inversa

Propriedades

Sejam A e B matrizes $n \times n$ inversíveis, e c um escalar, com $c \neq 0$.

a) $(A^{-1})^{-1} = A$ (inversa da inversa)

b) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ (inversa da transposta)

c) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (inversa do produto)

d) $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$ (inversa do produto por escalar)

Exercício 1

Problema

Verifique que B é a inversa de A efetuando os produtos BA e AB.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,2 \\ -0,2 & 0,4 \end{bmatrix}$$

Exercício 2

Problema

Calcule a inversa da matriz abaixo.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Exercício 3

Problema

Sejam dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 15 \end{bmatrix}.$$

1. Calcule AX.
2. Escreva o sistema linear $AX = B$.

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ -x + 3y = 15 \end{cases}$$

Exercício 4

Problema

Sejam dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 15 \end{bmatrix}.$$

1. Calcule A^{-1}.
2. Calcule X usando $X = A^{-1}B$.
3. Mostre que $AX = B$.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3/5 & -2/5 \\ 1/5 & 1/5 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Exercício 5

Problema

- Seja dado um sistema linear na forma matricial $AX = B$.
- Se A possui inversa, podemos obter a solução do sistema calculando $X = A^{-1}B$, como fizemos no exercício anterior.
- Usando essa ideia, escreva o sistema abaixo na forma matricial e determine sua solução.

$$\begin{cases} 2x & -3y & = & 1 \\ 4x & -2y & = & 6 \end{cases}$$