Capítulo 2

Espaços vetoriais

Como dissemos no Preâmbulo, este texto, ainda que seja introdutório em termos de Análise Funcional e Teoria do Operador, pretende-se acessível a um público mais amplo que os graduandos em Física e Matemática que naturalmente atinjam o momento de estudar esses assuntos.

Por isso, considerando a hipótese do leitor ter feito cursos de Cálculo e Álgebra que o habilitem a lidar com o conteúdo abaixo, porém sem a familiaridade necessária com as definições e resultados básicos, em linguagem precisa, que um bom curso de Análise ou Álgebra Linear proveriam, recordaremos na próxima seção o mínimo que convém ser conhecido para não causar embaraços da Seção 2.2 em diante, a partir da qual começaremos a intoduzir fatos e ferramentas novos que serão úteis para a anáilse dos operadores lineares de interesse da Física Matemática e do estudo das equações diferenciais.

2.1 Espaços vetoriais

Definição 2.1.1 (Espaço Vetorial)**.** Um *espaço vetorial* E sobre um corpo $\mathbb{K}$ é uma dupla $(E, \mathbb{K})$ munida de uma operação soma[1] em E e de multiplicação por escalar[2] entre E e $\mathbb{K}$.

Observação 2.1.2*.* O corpo $\mathbb{K}$ é geralmente escolhido como $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Neste trabalho, será sempre $\mathbb{C}$ e, de resto, vamos apenas dizer que E é um espaço vetorial, subentendendo que seja sobre $\mathbb{C}$. Pela existência do vetor neutro da soma, E nunca é vazio, mas pode conter apenas esse elemento. Sempre suporemos que os espaços vetoriais são não triviais, ou seja, possuam outros elementos além do vetor nulo.

[1] Uma *soma* em E é uma operação $\mathfrak{s} : E \times E \longrightarrow E$ tal que:

1. dados $u, v \in E$, $\mathfrak{s}(u, v) = \mathfrak{s}(v, u)$;
2. dados $u, v, z \in E$, $\mathfrak{s}(\mathfrak{s}(u, v), z) = \mathfrak{s}(u, \mathfrak{s}(v, z))$;
3. existe $\mathfrak{o} \in E$ tal que, $\forall u \in E$, $\mathfrak{s}(\mathfrak{o}, u) = u$;
4. $\forall u \in E$, existe $\tilde{u} \in E$ tal que $\mathfrak{s}(u, \tilde{u}) = \mathfrak{o}$.

[2] Uma *multiplicação por escalar* entre E e $\mathbb{K}$ é uma operação $\mathfrak{m} : \mathbb{K} \times E \longrightarrow E$ tal que:

1. $\forall u \in E$, $\mathfrak{m}(1, u) = u$;
2. $\forall u \in E$, $\mathfrak{m}(0, u) = \mathfrak{o}$;
3. dados $u, v \in E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, $\mathfrak{m}(\lambda, \mathfrak{s}(u, v)) = \mathfrak{s}(\mathfrak{m}(\lambda, u), \mathfrak{m}(\lambda, v))$;
4. dados $u \in E$ e $\lambda, \nu, \mu \in \mathbb{K}$, $\mathfrak{m}(\lambda + \nu\mu, u) = \mathfrak{s}(\mathfrak{m}(\lambda, u), \mathfrak{m}(\nu, \mathfrak{m}(\mu, u)))$.

Observação 2.1.3. Para verificar que E seja um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com certas operações de soma de vetores e multiplicação de escalar, basta mostrar que, para quaisquer $u, v \in E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, tem-se $u + \lambda v \in E$. Aqui já notamos a soma $\mathfrak{s}$ e a multiplicação por escalar $\mathfrak{m}$ das maneiras usuais, o que será feito no resto do texto.

Definição 2.1.4 (Norma Vetorial)**.** Seja E um espaço vetorial. Uma *norma* em E é uma função

$$\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$$

tal que:

1. dado $u \in E$, $\|u\| = 0$ se e somente se $u = 0$;
2. dados $u \in E$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, $\|\lambda u\| = |\lambda|\|u\|$;
3. dados $u, v \in E$, $\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$ (desigualdade triangular).

Definição 2.1.5 (Norma equivalente)**.** Seja E um espaço vetorial, sejam $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ duas normas nesse espaço. Diz-se que $\|\cdot\|_2$ é equivalente a $\|\cdot\|_1$ se existirem constantes $C_+, C_- > 0$ tais que:

$$C_-\|u\|_2 \leqslant \|u\|_1 \leqslant C_+\|u\|_2$$

para todo $u \in E$.

Observação 2.1.6. Vê-se que, se $\|\cdot\|_2$ é equivalente a $\|\cdot\|_1$, então também $\|\cdot\|_1$ é equivalente a $\|\cdot\|_2$. Em acréscimo, uma norma é sempre equivalente a si mesma, e se $\|\cdot\|_2$ ainda for equivalente a uma $\|\cdot\|_3$, então $\|\cdot\|_3$ e $\|\cdot\|_1$ serão equivalentes entre si. Com tudo isso, tem-se uma verdadeira relação de equivalência (no sentido de Teoria dos Conjuntos) entre normas.

Observação 2.1.7. No Lema 2.2.22 adiante, veremos que sob algumas hipóteses fortes, ainda que bastante usuais (completeza de E em relação às normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$), é possível provar que basta uma norma majorar a outra, em outras palavras, que exista $C > 0$ tal que $\|u\|_1 \leqslant C\|u\|_2$ para todo $u \in E$, para que elas sejam equivalentes.

Exemplo 2.1.8. Considere o conjunto $\mathcal{C}([0,1])$ das funções contínuas no intervalo $[0,1] \subset \mathbb{R}$, munido das normas $\|\varphi\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |\varphi(x)|$ e $\|\varphi\|_1 = \int_0^1 |\varphi(x)|dx$. Considere uma dada φ_0 não crescente tal que $\varphi_0(0) = 1$ e $\varphi_0(1) = 0$; construa a sequência $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por:

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} n\varphi_0\left(nx\right), & \text{se } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ 0, & \text{se } x \in \left(\frac{1}{n}, 1\right]. \end{cases}$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se $\|\varphi_n\|_1 = \|\varphi_0\|_1$, no entanto $\|\varphi_n\|_\infty \longrightarrow \infty$, portanto não pode existir $C > 0$ tal que $\|\varphi\|_\infty \leqslant C\|\varphi\|_1$ para todo $\varphi \in \mathcal{C}([0,1])$. Assim, $\|\cdot\|_\infty$ e $\|\cdot\|_1$ não são equivalentes.

A presença de uma norma em um espaço vetorial introduz nele uma estrutura topológica, isto é, *grosso modo*, uma noção de convergência nesse espaço (no Capítulo 3 revisaremos mais detidamente o que é uma *topologia* em um espaço). Todas as noções que em um curso típico de Análise Real ou Cálculo dependem do módulo (convergência, limite, fecho, pontos de acumulação, etc.) aqui existirão analogamente, substituindo-se o módulo pela norma, que é, efetivamente, a generalização para espaços abstratos da noção de valor absoluto de um vetor. Em particular, temos a generalização da noção de intervalo aberto ou fechado:

Definição 2.1.9 (Bola)**.** Seja E um espaço vetorial munido da norma $\|\cdot\|$, $u \in E$ e $r > 0$. A *bola aberta de raio r centrada em u* é o conjunto:

$$B_E(u, r) = \{v \in E : \|v - u\| < r\}.$$

A *bola fechada de raio r centrada em u* é simplesmente o fecho $\overline{B_E(u, r)}$.

Observação 2.1.10. Evidentemente, bolas abertas são subconjuntos abertos de E na topologia da norma correspondente, já que são a pré-imagem do aberto $[0, r)$ de R_0^+ através de uma função contínua.

Outro comentário envolvendo topologia que vale a pena ser feito é:

Proposição 2.1.11. Seja E um espaço vetorial normado, e $V \subset E$ um subespaço vetorial. Então o fecho de V, $\overline{V}$, é também um subespaço vetorial de E.

Demonstração. Se $u, v \in \overline{V}$, é porque existem sequências $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em V tais que $u_n \longrightarrow u$ e $v_n \longrightarrow v$. Dado $\lambda \in \mathbb{C}$, a sequência $(u_n + \lambda v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está contida em V e converge a $u + \lambda v$, portanto $u + \lambda v \in \overline{V}$. ■

Definição 2.1.12 (Operador Linear)**.** Dados dois espaços vetoriais E e F, uma função $B \in F^E$ é dita ser um *operador linear* de E em F se, dados $u, v \in E$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, verificar-se:

$$B(u + \lambda v) = B(u) + \lambda B(v).$$

Definição 2.1.13 (Norma Operatória)**.** Sejam E e F espaços vetoriais dotados, respectivamente, das normas $\|\cdot\|_E$ e $\|\cdot\|_F$. Seja $B : E \longrightarrow F$ linear. Se for

$$\sup_{\substack{u\in E\\ u\neq 0}} \frac{\|Bu\|_F}{\|u\|_E} < \infty,$$

chamaremos esse número de *norma* de B e o denotaremos $\|B\|_{\mathcal{L}(E,F)}$.

Observação 2.1.14. É fácil ver que, se $B : E \longrightarrow F$ for limitado, então tem-se também $\|B\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{\substack{u\in E\\ \|u\|_E=1}} \|Bu\|_F$.

Observação 2.1.15. Se $B : E \longrightarrow F$ for limitado, tem-se, para qualquer $u \in E$, a útil desigualdade $\|Bu\|_F \leqslant \|B\|_{\mathcal{L}(E,F)} \|u\|_E$.

Proposição 2.1.16. Sejam E e F espaços normados, e $B : E \longmapsto F$ linear. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. B é limitado;
2. B é contínuo em 0;
3. B é contínuo;
4. $\forall u, v \in E$, existe $K > 0$ tal que $\|B(u - v)\|_F \leqslant K\|u - v\|_E$.

Demonstração. Que (1) e (4) são equivalentes é óbvio. Que (1) implica (2) é evidente pela fórmula $\|Bu\| \leqslant \|B\| \, \|u\|$; (2) implica (3) por linearidade: seja $\tilde{u} \in E$ qualquer, como B é contínuo em 0, então $B(u - \tilde{u})$ aproxima-se de 0 conforme u de $\tilde{u}$, portanto $Bu \longrightarrow B\tilde{u}$ conforme $u \longrightarrow \tilde{u}$. Falta mostrar que (3) implica (1), o que faremos mostrando que, se B não for limitado, não poderá ser contínuo.

Com efeito, se B não é limitado, existe uma sequência de elementos não nulos $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em E tal que $\|Bu_n\| > n\|u_n\|$; definamos outra sequência, $v_n = \frac{1}{n\|u_n\|}u_n$. Segue que $\|v_n\| = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$ segundo $n \longrightarrow \infty$, porém $\|Bv_n\| > 1$, portanto B não é contínuo. ∎

Observação 2.1.17. O item (4) da proposição nada mais é que a continuidade de Lipschitz; além do mais, vê-se que o fato de ser B uniformemente contínuo também é equivalente às afirmações acima.

Definição 2.1.18 (Espaço Operatório)**.** Sejam E e F dois espaços vetoriais normados. O *espaço operatório* entre E e F, ou *espaço dos operadores limitados* de E em F é:

$$\mathcal{L}(E, F) = \left\{ B \in F^E : B \text{ é linear e } \|B\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty \right\}.$$

Observação 2.1.19. Se for $E = F$, denotaremos $\mathcal{L}(E, E)$ simplesmente por $\mathcal{L}(E)$.

Proposição 2.1.20. Sejam E e F dois espaços normados. Então $\mathcal{L}(E, F)$ (munido das operações de soma de funções e multiplicação de função por escalar usuais) é um espaço vetorial para o qual $\| \cdot \|_{\mathcal{L}(E,F)}$ é uma norma.

Demonstração. Que $\mathcal{L}(E, F)$ seja espaço vetorial com as operações $(B_1 + B_2)(u) = B_1(u) + B_2(u)$ e $(\lambda B)(u) = \lambda B(u)$ é óbvio. O fato de ser-lhe $\| \cdot \|_{\mathcal{L}(E,F)}$ uma norma deriva das propriedades da norma do espaço F; os detalhes ficam para o leitor. ∎

Observação 2.1.21. Como veremos no Capítulo 9, geralmente não se podem definir operadores não limitados em todo um espaço vetorial, mas somente em seus subespaços densos. Isso cria dificuldades para a definição de soma entre operadores não limitados, já que seus domínios podem não coincidir. Na verdade, esse é um problema difícil de contornar, embora existam algumas noções de soma de operadores não limitados pôr as referências. Em todo caso, sem a condição de limitação, não há uma estrutura linear natural no conjunto de todos os operadores lineares entre E e F.

Definição 2.1.22 (Produto Interno)**.** Seja E um espaço vetorial. Um *produto interno* em E é uma função

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$$

tal que:

1. dados $u, v \in E$, $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$;
2. dados $u, v, w \in E$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, $\langle u + \lambda v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \lambda \langle v, w\rangle$;
3. dado $u \in E$, $\langle u, u\rangle \geqslant 0$, a igualdade valendo se, e somente se, $u = 0$.

Observação 2.1.23. A propriedade (2) do produto interno significa linearidade na primeira variável. Da propriedade (1), segue ainda que, dados $u, v, w \in E$ e $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\langle w, u + \lambda v\rangle = \langle w, u\rangle + \overline{\lambda} \langle w, v\rangle ,$$

antilinearidade. Tal característica mista de linearidade e antilinearidade é conhecida como *sesquilinearidade*.

Proposição 2.1.24 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)**.** Seja $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$ um produto interno em um espaço vetorial E. Então, para quaisquer $u, v \in E$:

$$|\langle u, v\rangle|^2 \leqslant \langle u, u\rangle \langle v, v\rangle .$$

Demonstração. A desigualdade é óbvia se $u = 0$. Tomemos então $u \neq 0$ e definamos $\lambda = \frac{\langle v,u\rangle}{\langle u,u\rangle}$. Assim, escrevendo $v = v + \lambda u - \lambda u$, segue:

$$\begin{aligned} \langle v, v\rangle &= \langle v - \lambda u + \lambda u, v - \lambda u + \lambda u\rangle \\ &= \underbrace{\langle v - \lambda u, v - \lambda u\rangle}_{\geqslant 0} + |\lambda|^2 \langle u, u\rangle + 2\mathrm{Re}\left[\lambda \underbrace{\langle u, v - \lambda u\rangle}_{=0}\right] \\ &\geqslant |\lambda|^2 \langle u, u\rangle , \end{aligned}$$

e portanto a desigualdade fica provada multiplicando ambos os lados por $\langle u, u\rangle$. ∎

Observação 2.1.25. O produto interno induz uma norma em E por meio da identificação

$$\|u\|_{\langle\,,\rangle} = \sqrt{\langle u, u\rangle} \quad \forall u \in E.$$

As propriedades de norma decorrerão das de produto interno e da desigualdade de Cauchy-Schwarz. Ao longo deste trabalho, sempre tomaremos $\|\cdot\|_{\langle\,,\rangle}$ como norma de um espaço E com produto interno, portanto deixaremos de indicar o subíndice $\langle\,,\rangle$. Nessa notação, a desigualdade de Cauchy-Schwarz fica: $|\langle u, v\rangle| \leqslant \|u\|\,\|v\|$.

Observação 2.1.26. A desigualdade $|\langle u, v\rangle| \leqslant \|u\|\,\|v\|$ deixa claro que o produto interno é bicontínuo (*i.e.*, contínuo separadamente em cada uma de suas duas variáveis) com relação à norma que induz. No entanto, veremos no exemplo abaixo que um produto interno pode muito bem não ser contínuo em relação a uma norma diferente daquela que ele próprio induz.

Exemplo 2.1.27. Seja $E = \mathcal{C}([0, 1])$ o espaço das funções contínuas no intervalo $[0, 1]$. Defina nele o produto interno $\langle f, g\rangle_\infty = \sup_{x\in[0,1]} f(x)\overline{g(x)}$, que induz a norma $\|\cdot\|_\infty$ introduzida no Exemplo 2.1.8. Esse produto não é bicontínuo em relação à norma $\|\cdot\|_1$ apresentada no mesmo exemplo: com efeito, ponhamos $f(x) = 1$ para todo $x \in [0, 1]$ e consideremos a sequência $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por

$$g_n(x) = \begin{cases} 1 - nx, & \text{se } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ 0, & \text{se } x \in \left(\frac{1}{n}, 1\right] . \end{cases}$$

Ora, $g_n \longrightarrow 0$ segundo a norma $\|\cdot\|_1$, no entanto $\langle f, g_n\rangle_\infty = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Acabamos de ver que, a partir de um produto interno, sempre se pode definir uma norma. O contrário é verdade caso a norma seja "geometricamente boa", em outras palavras, satisfaça à *identidade do paralelogramo* (2.1.3) (que, o leitor atentará, é uma generalização de uma bem conhecida identidade da geometria plana). Antes de enunciar cuidadosamente esse fato, vejamos como o produto interno $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$ pode ser recuperado a partir de sua norma induzida $\|\cdot\|_{\langle\cdot,\cdot\rangle}$:

Proposição 2.1.28 (Polarização)**.** Seja E um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ com produto interno $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$; seja $\|\cdot\|$ a norma por ele induzida. Tem-se:

- se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, então, dados $u, v \in E$:

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right); \tag{2.1.1}$$

- se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, então, dados $u, v \in E$:

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 + i\|u+iv\|^2 - i\|u-iv\|^2\right). \tag{2.1.2}$$

Demonstração. Direta, basta abrir os termos tendo em mente a definição de norma induzida, $\|u\|^2 = \langle u, u\rangle$; no caso real, lembrar que $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$, ao passo que, no complexo, $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$. ∎

Observação 2.1.29. A Equação (2.1.1) é conhecida como *identidade de polarização real*, e a (2.1.2) como *identidade de polarização complexa*. Esta segunda será particularmente útil na Seção 2.4, no Corolário 2.4.16, em que mostraremos que, num espaço vetorial complexo com produto interno (no corolário, o enunciado é para espaços de Hilbert, mas é trivial ver que vale para este caso mais geral), um operador $A : E \longrightarrow E$ é nulo se e somente se $\langle Au, u\rangle = 0$ para todo $u \in E$ (repare que isso não é verdade para espaços reais; dê exemplos).

Proposição 2.1.30. Seja E um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$, com norma $\|\cdot\|$. Existe em E um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ que a induza se e somente se ela satisfizer a:

$$\|u\|^2 + \|v\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2\right), \tag{2.1.3}$$

para todos $u, v \in E$.

Observação 2.1.31. A Equação (2.1.3) é conhecida como *identidade do paralelogramo*. Veremos ainda neste capítulo como essa aparentemente inocente igualdade tem profundas implicações sobre espaços vetoriais, conectando suas geometrias e suas topologias e tornando-os, de maneira a ser esclarecida (por exemplo no Corolário 2.2.36 ou na Proposição 2.3.2), "mais parecidos" com os espaços de dimensão finita.

Demonstração. Se $\|\cdot\|$ é induzida por algum produto interno, a identidade é de verificação imediata; se a norma satisfaz a (2.1.3), então defina $\langle\,,\rangle$ por meio de (2.1.1) ou (2.1.2), segundo E for um espaço real ou complexo, respectivamente. As propriedades (1) e (3) da Definição 2.1.22 ficam claramente satisfeitas, mas a linearidade depende da identidade do paralelogramo.

Assim, dados $u, v, w \in E$, mostra-se que $\langle u+v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$ com auxílio das fórmulas

$$\|u+v\pm w\|^2 = \left\|\frac{2u\pm w}{2} + \frac{2v\pm w}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\|2u\pm w\|^2 + \frac{1}{2}\|2v\pm w\|^2 - \|u-v\|^2$$

e

$$\|2u\pm w\|^2 = \|u+(u\pm w)\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|u\pm w\|^2 - \|w\|^2,$$

obtidas ambas a partir da Equação (2.1.3). Para ver que $\langle \lambda u, v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle$, com $\lambda \in \mathbb{K}$, notemos que isso é obviamente verdadeiro para $\lambda = 0$, $\lambda = -1$ e $\lambda = i$ (se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), de modo que basta fazer a prova para $\lambda > 0$ (no caso complexo, considere ainda que

$\lambda u = \mathrm{Re}(\lambda)u + i\,\mathrm{Im}(\lambda)u$ e decomponha $\langle \lambda u, v\rangle = \langle \mathrm{Re}(\lambda)u, v\rangle + i\,\langle \mathrm{Im}(\lambda)u, v\rangle)$. Por indução finita, vê-se que a homogeneidade do produto também vale para $\lambda \in \mathbb{N}$.

O argumento agora será para λ racional e, por continuidade, para λ real. Tome $\lambda = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $p, q \in \mathbb{N}$, de modo que

$$q\left\langle \frac{p}{q}u, v\right\rangle = \left\langle q\frac{p}{q}u, v\right\rangle = \langle pu, v\rangle = p\,\langle u, v\rangle\,,$$

logo $\langle \lambda u, v\rangle = \lambda\,\langle u, v\rangle$ para todo $\lambda \in \mathbb{Q}$. Por fim, considere a função $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{K}$ dada por $f(\alpha) = \langle \alpha u, v\rangle - \alpha\,\langle u, v\rangle$, que é contínua (pois é a composição das funções contínuas de multiplicação por escalar, soma vetorial e norma); dado $\lambda > 0$ qualquer, ela é uniformemente contínua em um compacto[3] $K \subset [0, \infty)$ contendo λ e vale 0 em $K \cap \mathbb{Q}$, que é denso em K; estendendo f continuamente, segue que ela é a função nula em todo K, em particular: $\langle \lambda u, v\rangle = \lambda\,\langle u, v\rangle$ para todo $\lambda > 0$. ■

Já bem estabelecido o produto interno, vejamos que estrutura adicional ele traz a um espaço linear.

Definição 2.1.32 (Complemento Ortogonal)**.** Seja E um espaço vetorial com produto interno, e $V \subset E$ um subespaço. O *complemento ortogonal* de V em E é o conjunto

$$V^\perp = \{u \in E : \langle u, v\rangle = 0 \quad \forall v \in V\}\,.$$

Observação 2.1.33. É fácil mostrar que $V^\perp$ é também um subespaço vetorial de E, e que $V \cap V^\perp = \{0\}$. Além disso, em dimensão finita, tinha-se que $E = V \oplus V^\perp$; em dimensão infinita, essa identidade infelizmente não é geral, valendo apenas em espaços de Hilbert quando V for um subespaço fechado (ver Proposição 2.3.2).

Proposição 2.1.34. Seja E um espaço vetorial com produto interno, e $V \subset E$ um subespaço. Então $V^\perp$ é um subespaço fechado de E.

Demonstração. Dado $v \in V$, definamos $\rho_v \in \mathcal{L}(E, \mathbb{C})$ por $\rho_v(u) = \langle u, v\rangle$ para cada $u \in E$; essa função é de fato linear e, com auxílio desigualdade de Cauchy-Schwarz, vemos que $\|\rho_v\|_{\mathcal{L}(E,\mathbb{C})} = \|v\|_E$. Observando então que $V^\perp = \cap_{v\in V} \ker(\rho_v)$, e sabendo que o núcleo de um operador contínuo é um conjunto fechado, temos que $V^\perp$ é uma intersecção de fechados, por isso é fechado. ■

Proposição 2.1.35. Seja E um espaço com produto interno e $U \subset V \subset E$ subespaços. Então $V^\perp \subset U^\perp$. Além disso, $\left(\overline{V}\right)^\perp = V^\perp$ ($\overline{V}$ é o fecho de V), e $\overline{V} \subset \left(V^\perp\right)^\perp$.

Demonstração. Seja $v \in V^\perp$, então, $\forall u \in V$, tem-se $\langle v, u\rangle = 0$, o que vale igualmente para todo $u \in U$, portanto $v \in U^\perp$. Daí mesmo decorre que $\overline{V}^\perp \subset V^\perp$. Para mostrar a inclusão contrária, tomemos $v \in V^\perp$ e, para cada $u \in \overline{V}$, tomemos uma sequência u_n em V convergente a u; pela continuidade do produto interno, segue que $0 = \langle v, u_n\rangle \longrightarrow \langle v, u\rangle$, do que $v \in \overline{V}^\perp$. Finalmente, dado $v \in V$, verifica-se diretamente que $v \in \left(V^\perp\right)^\perp$; como esse espaço é complemento de alguém, é fechado, do que $\overline{V} \subset \left(V^\perp\right)^\perp$. ■

[3]Toda função contínua é uniformemente contínua em um subconjunto compacto de seu domínio; ademais, uma função uniformemente contínua definida em um subconjunto denso de um espaço X, se for valorada em um espaço completo, como $\mathbb{K}$, possui uma única extensão contínua a todo X. Esse é um importante resultado de análise que estamos aqui usando, ao subentender que f deve ser igual à extensão de $f|_{K\cap\mathbb{Q}}$.

Observação 2.1.36. No Corolário 2.3.6, veremos que, em espaços de Hilbert, tem-se na verdade $\overline{V} = \left(V^{\perp}\right)^{\perp}$, o que é um resultado familiar dos espaços de dimensão finita.

Definição 2.1.37 (Espaço Dual Topológico)**.** Seja E um espaço vetorial. O *espaço dual topológico* de E, denotado E^*, é o conjunto dos funcionais lineares limitados sobre E:

$$E^* = \left\{\phi \in \mathbb{C}^E : \phi \text{ é linear e } \|\phi\|_{\mathcal{L}(E,\mathbb{C})} < \infty\right\}.$$

Analogamente, define-se o *espaço bidual* como o dual do dual: $E^{**} = (E^*)^*$.

Observação 2.1.38. Evidentemente, $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{C})$, espaço dos funcionais lineares contínuos em E.

Observação 2.1.39. Se tirarmos a exigência de limitação de sobre os funcionais lineares em E^*, define-se o *espaço dual algébrico* de E, o conjunto dos funcionais lineares sobre E. Como trabalharemos somente com o *topológico*, é a ele que nos referiremos quando dissermos simplesmente *dual*.

Observação 2.1.40. É claro que E^* é por sua vez um espaço vetorial, pondo, para $\phi, \varphi \in E^*$ e $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$(\phi + \lambda\varphi)(u) = \phi(u) + \lambda\varphi(u) \quad \forall u \in E;$$

entretanto, por questões técnicas, é mais interessante definir a multiplição por escalar em E^* de maneira distinta:

$$(\phi + \lambda\varphi)(u) = \phi(u) + \overline{\lambda}\varphi(u) \quad \forall u \in E. \tag{2.1.4}$$

Com essa definição, poderemos dizer que alguns espaços vetoriais, como os de Hilbert, são isomorfos, e não antiisomorfos, a seus duais; ver por exemplo o Corolário 2.3.16.

Em dimensão finita, prova-se que o dual tem a mesma dimensão do espaço, *i.e.*, o dual de $\mathbb{R}^n$ é o próprio $\mathbb{R}^n$ (ou, melhor dizendo, um espaço isomorfo a ele, como no Exemplo 2.3.18); analogamente, em espaços de Hilbert, ocorrerá que $E = E^*$ (Corolário 2.3.16). Entretanto, para espaços normados mais gerais isso não é verdade, podendo-se provar apenas, através do endomorfismo

$$\begin{array}{rcl} \sim : E \ni u & \longmapsto & \tilde{u} \in E^{**} \\ \tilde{u}(\phi) & = & \phi(u) \qquad \forall \phi \in E^*, \end{array} \tag{2.1.5}$$

que $E \subset E^{**}$, no sentido de ser E isomorfo a um subespaço de E^{**} e ficando normas preservadas, $\|\tilde{u}\|_{E^{**}} = \|u\|_E$:

Proposição 2.1.41. Seja E um espaço normado. Utilizando a notação do parágrafo acima, a aplicação $\sim$ é linear e, dado $u \in E$, tem-se:

$$\|u\|_E = \|\tilde{u}\|_{E^{**}} = \sup_{\substack{\phi \in E^* \\ \phi \neq 0}} \frac{|\phi(u)|}{\|\phi\|_{E^*}}. \tag{2.1.6}$$

Demonstração. Dado $\phi \in E^*$, temos $|\phi(u)| \leqslant \|\phi\|_{E^*} \|u\|_E$, do que:

$$\|\tilde{u}\|_{E^{**}} = \sup_{\substack{\phi \in E^* \\ \phi \neq 0}} \frac{|\phi(u)|}{\|\phi\|_{E^*}} \leqslant \sup_{\substack{\phi \in E^* \\ \phi \neq 0}} \|u\|_E = \|u\|_E;$$

por outro lado, veremos no Corolário 2.1.49 à frente que existe $\phi_u \in E^*$ tal que $\|\phi_u\|_{E^*} = \|u\|_E$ e $\phi_u(u) = \|u\|_E^2$, daí:

$$\|\tilde{u}\|_{E^{**}} \geqslant \frac{|\phi_u(u)|}{\|\phi_u\|_{E^*}} = \|u\|_E,$$

provando que $\|u\|_E = \|\tilde{u}\|_{E^{**}}$. A linearidade de $\sim$ é evidente. ■

Também é possível mostrar que há uma injeção de E em E^* (Corolário 2.1.49) que respeita normas, embora ela não seja necessariamente linear e nem de muito interesse para o presente estudo.

Observação 2.1.42. E^* é também um espaço normado, munido da norma $\mathcal{L}(E, \mathbb{C})$; aliás, E^* com essa norma é sempre um espaço completo (Corolário 2.2.7). Em espaços de Hilbert, em que $E = E^*$, veremos ainda que a norma $\mathcal{L}(E, \mathbb{C})$ coincidirá com a extensão da de E para o dual (ver Corolário 2.3.22).

Para encerrar esta seção, vejamos o primeiro dos grandes teoremas básicos da Análise Funcional:

Proposição 2.1.43 (Hahn-Banach real)**.** Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e ρ uma *semi-norma* em E, isto é, $\rho : E \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ tal que:

1. dados $u \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, $\rho(\lambda u) = |\lambda|\rho(u)$;
2. dados $u, v \in E$, $\rho(u + v) \leqslant \rho(u) + \rho(v)$.

Então, se para algum subespaço $U \subset E$ houver uma função linear $\phi : U \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que, para todo $u \in U$ for $\phi(u) \leqslant \rho(u)$, existirá $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ linear tal que $\phi(u) = \varphi(u)$ para todo $u \in U$ e $\varphi(u) \leqslant \rho(u)$ para $u \in E$ arbitrário.

Para provar esse resultado, precisaremos do Lemma de Zorn, que é equivalente ao Axioma da Escolha:

Lema 2.1.44 (Zorn)**.** Seja X um conjunto ordenado não vazio tal que todos os seus subconjuntos totalmente ordenados tenham uma cota superior. Então X tem um elemento máximo.

Para uma prova desse lemma (e uma clarificação de seu enunciado), veja o apêndice. Para o fato de ele ser equivalente ao Axioma da Escolha, referência.

Demonstração da Proposição 2.1.43. Definamos o conjunto:

$$X = \left\{ \sigma \in \mathbb{R}^D : \begin{array}{l} D \subset E \ \text{ é um subespaço e } \sigma \text{ é linear} \\ \sigma(u) = \phi(u) \ \forall u \in U \ \text{ e } \ |\sigma(u)| \leqslant \rho(u) \ \forall u \in D \end{array} \right\},$$

no qual introduzimos a relação de ordem $\preceq$ dada por: $\sigma_1 \preceq \sigma_2$ se $D_{\sigma_1} \subset D_{\sigma_2}$ e $\sigma_1(u) = \sigma_2(u)$ para todo $u \in D_{\sigma_1}$. Veremos que X satisfaz as hipóteses do Lema de Zorn.

Primeiramente, $X \neq \emptyset$, pois $\phi \in X$. Além disso, suponha $Y \subset X$ totalmente ordenado; segue que, pondo $D_{\tilde{\sigma}} = \cup_{\sigma \in Y} D_\sigma$ e $\tilde{\sigma}(u) = \sigma(u)$ para algum $\sigma \in Y$ tal que $u \in D_\sigma$, verifica-se que $\tilde{\sigma}$ é uma cota superior de Y. Então X possui um elemento máximo φ. Basta mostrar que $D_\varphi = E$, o que será feito por contradição.

Suponha $D_\varphi \neq E$, de modo que haja $v \in E \setminus D_\varphi$. Assim, definamos $D_{\tilde{\varphi}} = D_\varphi \oplus \mathbb{R}v$ e, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\tilde{\varphi}(u + \lambda v) = \varphi(u) - \lambda K$, para algum $K \in \mathbb{R}$, o que dá uma função linear em

$D_{\tilde{\varphi}}$. Se for possível escolher K de modo a termos $\tilde{\varphi}(u) \leqslant \rho(u)$ para $u \in D_{\tilde{\varphi}}$, obteremos um absurdo, pois será $\varphi \preceq \tilde{\varphi}$ com $\varphi \neq \tilde{\varphi}$, contradizendo o fato de φ ser maximal em X.

Mas com efeito tal é possível, pois:

$$\begin{array}{rcccccc} \varphi(u) - \varphi(w) & = & \varphi(u-w) & \leqslant & \rho(u+v-w-v) & \leqslant & \rho(u+v) + \rho(w+v) \\ & & & \Downarrow & & & \\ & & \varphi(u) - \rho(u+v) & \leqslant & \varphi(w) + \rho(w+v) & & \end{array}$$

para quaisquer $u, w \in D_\varphi$, assim basta escolher K tal que:

$$\sup_{u \in D_\varphi} \{\varphi(u) - \rho(u+v)\} \;\leqslant\; K \;\leqslant\; \inf_{u \in D_\varphi} \{\varphi(u) + \rho(u+v)\},$$

e verifica-se que $\tilde{\varphi}(u + \lambda v) \leqslant \rho(u + \lambda v)$ para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u \in D_\varphi$. ■

Corolário 2.1.45 (Hahn-Banach complexo)**.** Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ e ρ uma *seminorma* em E. Então, se para algum subespaço $U \subset E$ houver uma função linear $\phi : U \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que, para todo $u \in U$ for $|\phi(u)| \leqslant \rho(u)$, existirá $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{C}$ linear tal que $\phi(u) = \varphi(u)$ para todo $u \in U$ e $|\varphi(u)| \leqslant \rho(u)$ para $u \in E$ arbitrário.

Demonstração. Basta escrever $\phi = \phi_R + i\,\phi_I$, em que ϕ_R e ϕ_I são as partes real e imaginária de ϕ. Para $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u, v \in U$, tem-se $\phi_R(u + \lambda v) = \phi_R(u) + \lambda\phi_R(v)$, ou seja, $\phi_R : (U, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ é linear e, verifica-se, satisfaz $\phi_R(u) \leqslant \rho(u)$ para todo $u \in U$. Pela Proposição 2.1.43, ϕ_R estende-se a um funcional linear real $\varphi_R : (E, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que, $\forall u \in E$, $\varphi_R(u) \leqslant \rho(u)$, o que dá também $-\varphi_R(u) = \varphi_R(-u) \leqslant \rho(u)$, daí $|\varphi_R(u)| \leqslant \rho(u)$.

Além disso, observamos que:

$$\phi_R(iu) + i\phi_I(iu) = \phi(iu) = i\phi(u) = i\phi_R(u) - \phi_I(u),$$

do que obtemos $\phi(u) = \phi_R(u) - i\phi_R(iu)$ em U. Definamos, inspirados nisso, o seguinte funcional de $(E, \mathbb{C})$ em $\mathbb{C}$:

$$\varphi(u) = \varphi_R(u) - i\varphi_R(iu) \quad \forall u \in E,$$

que é de fato linear, pois tomando $\lambda = \alpha + i\beta$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, e $u, v \in E$:

$$\varphi(u + \lambda v) = \varphi_R(u) + (\alpha + i\beta)\varphi_R(v) - i\varphi_R(iu) - i(\alpha + i\beta)\varphi_R(iv) = \varphi(u) + \lambda\varphi(v).$$

Ora, como $\varphi(u) = \phi(u)$ se $u \in U$, para provar o corolário falta mostrar apenas que $|\varphi(u)| \leqslant \rho(u)$ para qualquer $u \in E$. Isso será feito notando que $\varphi(u) \in \mathbb{C}$, portanto encontra-se $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $\varphi(u) = e^{i\theta}|\varphi(u)|$; segue que $e^{-i\theta}\varphi(u)$ é real, e então:

$$|\varphi(u)| = |e^{-i\theta}\varphi(u)| = |\varphi_R(u)| \leqslant \rho(u),$$

como queríamos. ■

Observação 2.1.46 (Extensividade de operadores limitados). Nos ubíquos casos em que um operador contínuo B está definido apenas em um subespaço denso de E, e aplica em um espaço F completo (isto é, de Banach), pode-se (como aliás fazemos com qualquer função real uniformemente contínua) estendê-lo linearmente a todo o espaço E por continuidade, e a extensão, sendo contínua, será também limitada. Entretanto, se B estiver definido em um subespaço não denso de E, o operdor não será, em geral, extensível de maneira limitada, como ocorreu acima para os funcionais. Veja-se o exemplo abaixo como demonstração desse fato.

Exemplo 2.1.47 (Operador não extensível). Sejam E e F espaços vetoriais normados, E contendo um subespaço fechado $G \subset E$ que não admita *complemento topológico*, ou seja, tal que não exista um subespaço $G' \subset E$ fechado com que se escreva $E = G \oplus G'$[4]. Nesse caso, tem-se evidentemente $G \neq E$, do contrário $G' = \{0\}$ ser-lhe-ia um complemento. Isso dito, exibiremos um operador limitado $B : G \longrightarrow F$ que não pode ser extendido linear e limitadamente a todo o espaço E.

Com efeito, tomemos $F = G$ e B como a identidade em G. Suponhamos por absurdo que B possua uma extensão contínua $\tilde{B} : E \longrightarrow G$ e ponhamos $f(u) = u - \tilde{B}u$ em E. Segue que $f(u) = 0$ se e somente se $u \in G$, ou seja, $G = \ker(f)$; mais ainda, $f(u) \in G \Leftrightarrow u \in G$, do que $f(u) \in G \Leftrightarrow f(u) = 0$, acarretando $\operatorname{ran}(f) \cap G = \{0\}$. Assim, dado $u \in E$ arbitrário, podemos escrever $u = v + w$ com $v = f(u) \in \operatorname{ran}(f)$ e $w = \tilde{B}u \in G$. Conclui-se que $E = G \oplus \operatorname{ran}(f)$; para ser $\operatorname{ran}(f)$ complemento de G e obtermos uma contradição, basta agora mostrar que essa imagem é fechada, o que é óbvio notando que $\operatorname{ran}(f) = \ker\left(\tilde{B}\right)$, e o núcleo de $\tilde{B}$, suposto contínuo, só pode ser fechado.

Observação 2.1.48. Como ficou claro no Exemplo 2.1.47, o grande empecilho para a extensão de operadores é a falta de complementos topológicos para os subespaços. Quando eles existirem (como é o caso dos espaços de Hilbert, pela Proposição 2.3.2), sempre se pode extender um operador limitado $B : E \supset U \longrightarrow F$, F espaço completo, primeiro para $\overline{U}$ por meio de extensão contínua (que será, verifique!, linear), depois, sendo U' seu complemento topológico, para o espaço todo de maneira trivial: sendo $v = u + u' \in E$ arbitrário com $u \in \overline{U}$ e $u' \in U'$ (é fácil ver que os elementos da decomposição são únicos, como na demonstração do Corolário 2.3.7), pondo $B(u + u') = B(u)$.

Corolário 2.1.49. Seja E um espaço normado. Para todo $u \in E$, existe $\tilde{u} \in E^*$ tal que $\tilde{u}(u) = \|u\|_E^2$ e, ademais, $\|\tilde{u}\|_{E^*} = \|u\|_E$.

Demonstração. Fixemos $v \in E$ e tomemos a seminorma $\rho(u) = \|u\|_E \|v\|_E$; consideremos o funcional $\phi_v \in \mathcal{L}(\operatorname{span}\{v\}, \mathbb{C})$ dado por $\phi_v(\lambda v) = \lambda \|v\|_E^2$, com $\lambda \in \mathbb{C}$. Pelo Corolário 2.1.45, existe $\tilde{v} \in E^*$ que estende ϕ_u a todo E sendo dominado por ρ. Evidentemente $\tilde{v}(v) = \|v\|_E^2$ e, como pela seminorma vê-se que $\|\tilde{v}\|_{E^*} \leqslant \|v\|_E$, a igualdade sendo atingida para $\tilde{v}(v)$, conclui-se que $\|\tilde{v}\|_{E^*} = \|v\|_E$. ■

Observação 2.1.50. Elementos $\phi \in E^*$ com as características elencadas no Corolário 2.1.49 podem ser pensados como *funcionais separadores* dentro do espaço E, no sentido de, se for $u, v \in E$ com $u \neq v$, então existirá um desses funcionais tal que $\phi(u) \neq \phi(v)$, a saber, aquele que satisfaz $\phi(u - v) = \|u - v\|_E^2$, cuja existência é precisamente o que o corolário garante.

2.2 Espaços de Banach

Em dimensão finita, os espaços vetoriais são, inescapavelmente, os euclidianos, já que todo espaço de dimensão n é isomorfo a $\mathbb{R}^n$ no caso real, ou a $\mathbb{C}^n$ no caso complexo. Suas boas características são: decomposição a partir de uma base simples de n elementos, completeza, presença de uma norma simples de calcular, cuja topologia é também simples,

[4]Um espaço em que nem todo subespaço fechado possui complemento topológico de fato existe, basta que seja de Banach sem ser de Hilbert[**?**]. Que é ser Banach e Hilbert não vem ao caso agora; para entender o Exemplo 2.1.47 basta admitir que exista E conforme pedido.

em que a convergência de uma sequência equivale à das componentes dos vetores, equivalência entre limitação e linearidade para os operadores, existência de um produto interno, reflexividade (ser igual a seu dual), etc.

Nesses espaços, os operadores lineares são simplesmente as matrizes, cuja teoria já é amplamente estudada em cursos de Álgebra Linear. Para que se possa falar em operadores mais interessantes, é necessário portanto recorrer a espaços de dimensão infinita; mas não a quaisquer, dadas as enormes dificuldades que acarreta a perda de finitude da dimensão. Vamos nos restringir a espaços que sejam suficientemente gerais para permitir-nos o desenvolvimento de uma teoria frutífera, que permita no mínimo analisar as equações diferenciais e os problemas da Mecânica Quântica, e, ao mesmo tempo, suficientemente "parecidos" com os espaços euclidianos para que sejam tratáveis de maneira satisfatoriamente estruturada.

Com espaços "parecidos" com os euclidianos, quereremos dizer espaços de Hilbert. Por enquanto, contentemo-nos com:

Definição 2.2.1 (Espaço de Banach)**.** Seja E um espaço vetorial munido de uma norma $\|\cdot\|$. E é dito um *espaço de Banach* se for completo em relação a essa norma.

Observação 2.2.2. Lembremo-nos que E é completo em relação a $\|\cdot\|$ se todas as suas sequências de Cauchy forem convergentes. Isto é, dada uma sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em E tal que $\|u_n - u_m\| \longrightarrow 0$ no limite em que n e m são tomados grandes, então existe um limite $u \in E$ para qual essa sequência converge. Formalmente, se para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{R}$ tal que, tomando $n, m \geqslant N$, tem-se $\|u_n - u_m\| < \delta$, então existe também $u \in E$ e um $\tilde{N} \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geqslant \tilde{N}$, $\|u_n - u\| < \varepsilon$.

Proposição 2.2.3. Seja E um espaço completo em relação a uma norma $\|\cdot\|_1$. Se houver em E uma norma $\|\cdot\|_2$ equivalente à primeira, então E será completo em relação a $\|\cdot\|_2$.

Demonstração. Óbvia. ■

Observação 2.2.4. O resultado inverso não é verdadeiro: um espaço vetorial pode ser completo em relação a duas normas, e mesmo assim elas não serem equivalentes (vide abaixo) será? para espaços métricos ok, mas aqui tem bem mais estrutura.. Entretanto, no Lema 2.2.22, prova-se que, para espaços completos em relação a duas normas, basta que uma norma majore a outra para que ambas sejam equivalentes. Por fim, em dimensão finita, todas as normas são equivalentes entre si, vide o Exercício ?? de **??** (no fim da referência há uma dica para resolvê-lo).

Exemplo 2.2.5. ideias para espaços completos com normas não equivalentes?? se é que isso é verdade para espaços normados.... pra espaços métricos é fácil mostrar, basta tomar a métrica trivial e qualquer outra.

Proposição 2.2.6. Sejam E e F dois espaços vetoriais normados, sendo F também de Banach. Então $\mathcal{L}(E, F)$ é um espaço de Banach.

Demonstração. Consideremos uma sequência de operadores $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{L}(E, F)$ que seja de Cauchy, *i.e.*, tal que $\|B_n - B_m\|_{\mathcal{L}(E,F)} \longrightarrow 0$ segundo n, m forem tomados suficientemente grandes. Em outras palavras, para todo $\varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que, para $n, m \geqslant N_\varepsilon$, tem-se:

$$\sup_{\substack{u\in E\\ u\neq 0}} \frac{\|(B_n - B_m)u\|_F}{\|u\|_E} = \sup_{\substack{u\in E\\ u\neq 0}} \frac{\|B_n u - B_m u\|_F}{\|u\|_E} < \varepsilon;$$

assim, para cada $u \in E$ não nulo, tomando-se $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{\|u\|_E}$ vê-se que $\|B_n u - B_m u\|_F < \varepsilon'$ para n, m grandes, ou seja, $(B_n u)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em F, portanto convergente – o mesmo vale, evidentemente, para $u = 0$. Por conseguinte, para $u \in E$ arbitrário, existe $\tilde{u} \in F$ tal que $B_n u \longrightarrow \tilde{u}$.

Agora basta mostrar que $\tilde{u}$ depende linear e continuamente de u, e então poremos $\tilde{u} = Bu$, com $B \in \mathcal{L}(E, F)$, e veremos que B é limite da sequência B_n. A linearidade vem da estimativa:

$$\|B_n(u + \alpha v) - (\tilde{u} + \alpha\tilde{v})\|_F \leqslant \|B_n u - \tilde{u}\|_F + |\alpha|\|B_n v - \tilde{v}\|_F \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

que obtivemos com a desigualdade triangular, e a limitação resulta de ser a sequência real $(\|B_n\|_{\mathcal{L}(E,F)})_{n\in\mathbb{N}}$ limitada por uma constante $K > 0$:

$$\big|\|B_n\|_{\mathcal{L}(E,F)} - \|B_m\|_{\mathcal{L}(E,F)}\big| \leqslant \|B_n - B_m\|_{\mathcal{L}(E,F)} \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

(lembremo-nos que $\mathbb{R}$ é completo, portanto suas sequências de Cauchy são convergentes, o que acarreta a existência da cota superior K), do que, para n suficientemente grande:

$$\frac{\|\tilde{u}\|_F}{\|u\|_E} < \frac{\|B_n u\|_F}{\|u\|_E} + 17 \leqslant K + 17 \;\Rightarrow\; \sup_{\substack{u\in E\\ u\neq 0}} \frac{\|\tilde{u}\|_F}{\|u\|_E} \leqslant K + 17$$

(17 era o número preferido de Gauß, por isso às vezes o utilizamos quando qualquer número serve). Assim, podemos definir $B \in \mathcal{L}(E, F)$ por $Bu = \tilde{u}$, e falta verificar que esse B é limite de B_n em $\mathcal{L}(E, F)$.

Ora, se não fose verdade que $\|B_n - B\|_{\mathcal{L}(E,F)} \longrightarrow 0$, então existiria $\delta > 0$ tal que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, haveria $u_n \in E$ satisfazendo $\frac{\|B_n u_n - Bu_n\|_F}{\|u_n\|_E} > \delta$, portanto:

$$\delta < \frac{\|(B_n - B_m)u_n - (Bu_n - B_m u_n)\|_F}{\|u_n\|_E} \leqslant \|B_n - B_m\|_{\mathcal{L}(E,F)} + \frac{\|B_m u_n - Bu_n\|_F}{\|u_n\|_E}.$$

Por fim, fixamos $n = N_{\frac{\delta}{2}}$ (N fora definido no primeiro parágrafo da demonstração) e escolhemos $m > n$ de tal forma grande a ter, além de $\|B_n - B_m\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \frac{\delta}{2}$, também:

$$\left\|B_m u_{N_{\frac{\delta}{2}}} - Bu_{N_{\frac{\delta}{2}}}\right\|_F < \frac{\delta}{2}\left\|u_{N_{\frac{\delta}{2}}}\right\|_E,$$

o que acarretaria a contradição $\delta < \delta$. ■

Corolário 2.2.7. Seja E um espaço normado qualquer. Então E^* é um espaço de Banach.

Demonstração. Basta reparar que $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{C})$, e $\mathbb{C}$ é um espaço vetorial normado completo, ou seja, espaço de Banach. ■

Proposição 2.2.8. Seja E um espaço de Banach e $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$. Se a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ for absolutamente convergente (*i.e.*, se a série das normas convergir, $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|_E < \infty$), então é convergente, ou seja, existe $u \in E$ tal que $\|u - \sum_{k=1}^{n} u_n\|_E \longrightarrow 0$ conforme $n \longrightarrow \infty$.

Demonstração. Como a série das normas converge, sabemos que $\sum_{k=n}^{\infty} \|u_k\|_E \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow \infty$. Com mais razão:

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} u_k - \sum_{k=1}^{m} u_k \right\|_E = \left\| \sum_{k=m+1}^{n} u_k \right\|_E \leqslant \sum_{k=m+1}^{n} \|u_k\|_E \leqslant \sum_{k=m+1}^{\infty} \|u_k\|_E \longrightarrow 0,$$

para $m < n$ naturais suficientemente grandes, mostrando que a sequência $\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy. Como E é completo, ela é convergente para um certo $u \in E$. ■

Para os fins a que se propõe este trabalho, falta ainda enunciar e provar alguns resultados centrais da Análise Funcional sobre espaços vetoriais normados e seus operadores antes de podermos passar para espaços de Hilbert propriamente.

São eles o *princípio de limitação uniforme* (utilíssimo, pois implicará que em Banach a convergência pontual de operadores lineares acarreta, para sequências limitadas, convergência também uniforme), o *teorema da aplicação aberta* (garantindo que imagens de abertos por operadores são contínuas, não apenas as pré-imagens de abertos, como ocorre para funções contínuas arbitrárias), e o *teorema do gráfico fechado*, que nos dará uma noção alternativa de continuidade aplicável inclusive para operadores não limitados.

Todos eles dependem de um resultado de Topologia conhecido como Teorema de Baire. Em uma grande quantidade de textos sobre Análise Funcional, infelizmente, esse tópico aparece de maneira confusa, manipulando várias definições topológicas (conjunto *magro*, *raro*, *genérico* e suas negações) que, exceto para a enunciação ou eventual uso do próprio teorema, poucas vezes aparecem (pelo menos no trabalho de um físico-matemático). Por isso decidimos reenunciá-lo aqui de maneira mais simples, meio que seguindo a referência [4].

Ali, reflete-se sobre alguma noção de "robustez" para subconjuntos de um espaço topológico, ou seja, alguma forma de dizer que são "grandes" o suficiente para "importarem": subconjuntos de X espaço topológico que sejam ao mesmo tempo abertos e densos. A intersecção de dois desses subconjuntos é, como sabemos, aberta, e mostra-se que também é densa. E a intersecção de uma família enumerável de subconjuntos abertos e densos em X?

O conjunto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, por exemplo, é uma tal intersecção (prove!) e, no entanto, continua sendo "grande", no sentido de ser, ainda que não mais aberto, denso em $\mathbb{R}$. Com efeito, embora em espaços topológicos gerais isso nem sempre ocorra (mesmo?), prova-se:

Lema 2.2.9 (Baire)**.** Seja E um espaço métrico completo, e $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ uma família de conjuntos abertos e densos em E. Então a intersecção $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ é densa em E.

A demonstração do lema acima encontra-se no apêndice; existe também um resultado análogo a esse para espaços topológicos de Hausdorff e compactos, ver referência.

Lema 2.2.10. Em um espaço topológico X, são equivalentes as segunites afirmações:

- dada qualquer família $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que todo A_n é aberto e denso em X, a intersecção $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ é densa em X;
- dada qualquer família $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que o fecho de todo A_n possui interior vazio, a união $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ também possui interior vazio.

Demonstração. Exercício. ■

Observação 2.2.11. Um espaço topológico X em que valem as afirmações do Lema 2.2.10 é chamado *espaço de Baire*.

Proposição 2.2.12 (Limitação Uniforme)**.** Sejam E um espaço de Banach, F um espaço vetorial normado, $(T_\sigma)_{\sigma\in\Upsilon}$ uma família arbitrária de operadores em $\mathcal{L}(E,F)$. Se, para cada $u\in E$ for $\sup_{\sigma\in\Upsilon}\|T_\sigma u\|_F<\infty$, então $\sup_{\sigma\in\Upsilon}\|T_\sigma\|_{\mathcal{L}(E,F)}<\infty$.

Demonstração. Para cada $n\in\mathbb{N}$, consideramos $E_n=\{u\in E:\|B_\sigma u\|_u\leqslant n,\ \forall\sigma\in\Upsilon\}$. Todo E_n é fechado, pois trata-se da intersecção das pré-imagens $T_\sigma^{-1}\left(\overline{B_F(0,n)}\right)$ (atente: $\overline{B_F(0,n)}$ é o fecho da bola em F centrada na origem de raio n) e, como sabemos, pré-imagem de fechado por função contínua é fechada (assim como intersecções arbitrárias de fechados). Ora, $E=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}$; se cada E_n tivesse interior vazio, pelos Lemas 2.2.9 e 2.2.10, o interior do próprio E seria vazio, o que não pode ser verdade.

Assim, existe $m\in\mathbb{N}$ tal que E_m tem interior não vazio, ou seja, existe $\tilde{u}\in E$ e $\varepsilon>0$ tal que $B_E(\tilde{u},\varepsilon)\subset E_m$. Daí, $\|T_\sigma u\|_F\leqslant m$ para todo $\sigma\in\Upsilon$ desde que $u\in B_E(\tilde{u},\varepsilon)$. Ora, tomando $v\in E$ com $\|v\|_E=1$, $u=\tilde{u}+\frac{\varepsilon}{2}v\in B_E(\tilde{u},\varepsilon)$, do que:

$$\|T_\sigma v\|_F=\frac{2}{\varepsilon}\|T_\sigma(u-\tilde{u})\|_F\leqslant\frac{2}{\varepsilon}\left(\|T_\sigma u\|_F+\|T_\sigma\tilde{u}\|_F\right)\leqslant\frac{4m}{\varepsilon}<\infty;$$

tomando o supremo de $\|T_\sigma v\|_F$ sobre $v\in E$ com $\|v\|_E=1$, depois sobre $\sigma\in\Upsilon$, o resultado segue. ■

Corolário 2.2.13 (Banach-Steinhaus)**.** Sejam E um espaço de Banach, F um espaço vetorial normado, $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de operadores em $\mathcal{L}(E,F)$. Se, para cada $u\in E$ for $\sup_{n\in\mathbb{N}}\|T_n u\|_F<\infty$, então $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente para $T\in\mathcal{L}(E,F)$ dado por $Tu=\lim_{n\in\mathbb{N}}T_n u$, $\forall u\in E$.

Demonstração. O operador T definido no enunciado é claramente linear, pela linearidade do limite; do mais, pela Proposição 2.2.12, tem-se, para $n\geqslant N$, N natural sufcientemente grande, $\|Tu\|_F<\|T_n u\|_F+17\leqslant\sup_{n\in\mathbb{N}}\|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)}\|u\|_E+17$. O resultado segue tomando o supremo de $\|Tu\|_F$ sobre $u\in E$ com $\|u\|_E=1$. ■

Observação 2.2.14. Precisa comentar a importância de um resultado como esse? Se precisa, o leitor deve trabalhar um pouco mais com análise e voltar quando tiver se convencido disso.

Para enunciar o próximo Lema 2.2.17 (do qual o teorema da aplicação aberta é um corolário direto), vamos estipular a seguinte notação:

Definição 2.2.15. Seja E um espaço vetorial, $u\in E$, $Z\subset E$ e $\lambda\in\mathbb{C}$. Dado um conjunto $V\subset E$ qualquer, denotamos:

1. $\lambda V\ =\ \{w\in E\ :\ w=\lambda v,\ v\in V\}$;
2. $u+V\ =\ \{w\in E\ :\ w=u+v,\ v\in V\}$;
3. $Z+V\ =\ \{w\in E\ :\ w=z+v,\ z\in Z,\ v\in V\}$.

Observação 2.2.16. Se E for normado, seja $B_E(u,r)\subset E$ uma bola aberta, como na Definição 2.1.9. É fácil verificar que $B_E(u,r)=u+rB_E(\mathsf{o},1)$, com $\mathsf{o}\in E$ o vetor nulo.

Lema 2.2.17. Sejam E e F espaços de Banach, $T\in\mathcal{L}(E,F)$ sobrejetivo. Então existe uma constante $c>0$ tal que $B_F(\mathsf{o},c)\subset T\left(B_E(\mathsf{o},1)\right)$.

Demonstração. Defina $F_n = \overline{T(B_E(\mathrm{o}, n))}$; como $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_E(\mathrm{o}, n) = E$ e T é sobrejetor, tem-se $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$; como cada F_n é fechado e a união de todos eles tem interior não vazio, pelos Lemas 2.2.9 e 2.2.10 vem que existe algum $m \in \mathbb{N}$ tal que F_m possui interior não vazio; ademais, já que $B_E(\mathrm{o}, m) = mB_E(\mathrm{o}, 1)$, T é linear e a multiplicação por escalar contínua, tem-se $F_m = m\overline{T(B_E(\mathrm{o}, 1))}$, portanto é possível afirmar que o interior de $\overline{T(B_E(\mathrm{o}, 1))}$ também é não vazio: segue que existe uma bola aberta $B_F(v, 4c)$ totalmente contida em $\overline{T(B_E(\mathrm{o}, 1))}$. Novamente por linearidade de T e pela definição de bola, sabemos que $-v \in \overline{T(B_E(\mathrm{o}, 1))}$. Assim, mostra-se que:

$$B_F(\mathrm{o}, 4c) = B_F(v, 4c) + (-v) \subset \overline{T(B_E(\mathrm{o}, 1))} + \overline{T(B_E(\mathrm{o}, 1))} = 2\overline{T(B_E(\mathrm{o}, 1))};$$

daí $B_F(\mathrm{o}, 2c) \subset \overline{T(B_E(\mathrm{o}, 1))}$, ou ainda: $B_F(\mathrm{o}, c) \subset \overline{T\left(B_E\left(\mathrm{o}, \frac{1}{2}\right)\right)}$.

Para acabar de demonstrar o lema, falta mostrar que, se $B_F(\mathrm{o}, c) \subset \overline{T\left(B_E\left(\mathrm{o}, \frac{1}{2}\right)\right)}$, então de fato $B_F(\mathrm{o}, c) \subset T(B_E(\mathrm{o}, 1))$, ou seja, para todo $v \in F$ com $\|v\|_F < c$, haverá $u \in E$, $\|u\|_E < 1$, com $v = Tu$. Pelo visto no parágrafo anterior, tal v é ponto de acumulação de $T\left(B_E\left(\mathrm{o}, \frac{1}{2}\right)\right)$, portanto, $\forall \varepsilon > 0$, existirá $z \in B_E\left(\mathrm{o}, \frac{1}{2}\right)$ tal que $\|v - Tz\|_F < \varepsilon$. Escolha $z_1 \in B_E\left(\mathrm{o}, \frac{1}{2}\right)$ que sirva para $\varepsilon = \frac{c}{2}$. Ora, a condição do parágrafo anterior é equivalente a $B_F\left(\mathrm{o}, \frac{c}{2}\right) \subset \overline{T\left(B_E\left(\mathrm{o}, \frac{1}{4}\right)\right)}$, então podemos escolher $z_2 \in B_E\left(\mathrm{o}, \frac{1}{4}\right)$ tal que $\|(v - Tz_1) - Tz_2\|_F < \frac{c}{4}$. Assim sucessivamente, ter-se-á uma sequência $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ com $\|z_n\|_E < \frac{1}{2^n}$ e $\|v - T\sum_{k=1}^{n} z_n\|_E < \frac{c}{2^n}$. Por fim, perceba que a sequência dada por $u_n = \sum_{k=1}^{n} z_n$ é de Cauchy: com efeito, supondo $n \geqslant m$,

$$\|u_n - u_m\|_E = \left\|\sum_{k=m+1}^{n} z_k\right\|_E < \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{2^k} \underset{\inf\{n,m\}\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

daí a existência de $u \in E$, $u = \lim_n u_n$, e, por continuidade de T e da norma, $\|v - Tu\|_F = 0$. Para demonstrar o lema, falta somente verificar se $u \in B_E(\mathrm{o}, 1)$, ou seja, ver que $\|u\|_E \leqslant \lim_n \sum_{k=1}^{n} \|z_k\|_E < \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} = 1$. ■

Proposição 2.2.18 (Aplicação Aberta)**.** Sejam E e F espaços de Banach. Se $T \in \mathcal{L}(E, F)$ é sobrejetivo, então é uma função aberta, *i.e.*, dado $U \subset E$ aberto, então $T(U) \subset F$ será conjunto aberto.

Demonstração. Basta mostrar que, dado $v \in T(U)$, haverá $r > 0$ tal que $B_F(v, r) \subset T(U)$. Seja $u \in U$ tal que $v = Tu$; como U é aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_E(u, \varepsilon) \subset U$. Ademais, sendo T limitado e sobrejetor, vale o Lema 2.2.17, portanto existe $c > 0$ tal que $B_F(\mathrm{o}, c) \subset T(B_E(\mathrm{o}, 1))$. Daí é fácil mostrar, primeiro, que $B_F(\mathrm{o}, \varepsilon c) \subset T(B_E(\mathrm{o}, \varepsilon))$, depois que $B_F(v, \varepsilon c) \subset T(B_E(u, \varepsilon)) \subset T(U)$. Tomando $r = \varepsilon c$, segue a proposição. ■

Observação 2.2.19. Em Análise ou Topologia, quando se trabalha com espaços métricos ou topológicos gerais, diz-se que uma função f é contínua se as pré-imagens $f^{-1}(A)$ de conjuntos abertos A forem também abertas. Prova-se que as imagens $f(K)$ de conjuntos compactos K são compactas, mas o mesmo *não* ocorre com abertos nem com fechados. Aí reside a importância da Proposição 2.2.18: garantir que, em espaços de Banach, operadores lineares contínuos sobrejetivos levam abertos em abertos, assim como compactos em compactos e conexos em conexos, o que já fazem as funções contínuas em geral.

Definição 2.2.20 (Gráfico)**.** Sejam E e F dois espaços vetoriais normados, e $T : E \longrightarrow F$ linear. O conjunto $\Gamma(T) = \{(u, v) \in E \times F : v = Tu\}$ é chamado de *gráfico* de T.

Observação 2.2.21. Naturalmente, a definição e gráfico de um operador extende-se para operadores não limitados, o que será objeto do Capítulo 9.

Lema 2.2.22. Seja E um espaço vetorial com normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$. Se E for completo em relação a ambas e, além disso, houver $C > 0$ tal que $\|u\|_1 \leqslant C\|u\|_2$ para todo $u \in E$, então $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ são equivalentes.

Demonstração. Consideremos os espaços de Banach $E = (X, \|\cdot\|_2)$ e $F = (X, \|\cdot\|_1)$. A inclusão $\mathrm{id} : E \longrightarrow F$ dada por $\mathrm{id}(u) = u$ pertence a $\mathcal{L}(E, F)$, pois, para $u \neq 0$:

$$\frac{\|\mathrm{id}(u)\|_F}{\|u\|_E} = \frac{\|u\|_1}{\|u\|_2} \leqslant C < \infty;$$

pelo Lema 2.2.17, existirá $\lambda > 0$ tal que, se $\|u\|_F < \lambda$, então $\|\mathrm{id}^{-1}(u)\|_E < 1$, mas isso significa dizer que $\|u\|_1 < \lambda \Rightarrow \|u\|_2 < 1$. Ora, dado qualquer $u \in X$ não nulo, pomos $v = \frac{\lambda}{17\|u\|_1}u$, de modo que $\|v\|_1 < \lambda$ e, portanto, $\left\|\frac{\lambda}{17\|u\|_1}u\right\|_2 < 1$; daí, $\|u\|_2 \leqslant \frac{17}{\lambda}\|u\|_1$. Como essa identidade é válida mesmo para $u = 0$, temos $\frac{\lambda}{17}\|u\|_2 \leqslant \|u\|_1 \leqslant C\|u\|_2$, demonstrando o corolário. ∎

Proposição 2.2.23 (Gráfico Fechado)**.** Sejam E e F espaços de Banach, e $T : E \longrightarrow F$ linear. Então $\Gamma(T)$ é um conjunto fechado na topologia produto[5] de $E \times F$ se e somente se T for limitado.

Demonstração. Seja $((u_n, Tu_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset \Gamma(T)$ uma sequência convergente na topologia produto ao ponto $(u, v) \in E \times F$, de modo que $(u_n)_n \in \mathbb{N}$ converge a um $u \in E$ na norma de E, e $(Tu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a $v \in F$ na norma de F. Se T é limitado, é contínuo, então claramente tem-se $v = Tu$, ou seja, $(u, v) \in \Gamma(T)$, e o gráfico de T é fechado. Para provar o resultado inverso, bastará mostrar que para toda sequência u_n em E convergente a u, a sequência Tu_n também convergirá; feito isso, pela hipótese de ser $\Gamma(T)$ fechado e termos (u_n, Tu_n) convergindo, teremos $\lim_n Tu_n = Tu$, o que implica continuidade, portanto limitação do operador T.

Para mostrar que Tu_n de fato converge em F, consideremos no espaço E a norma:

$$\|u\|_\Gamma = \|u\|_E + \|Tu\|_F;$$

obviamente $\|u\|_\Gamma \geqslant \|u\|_E$, portanto, pelo Lema 2.2.22, haverá $C > 0$ (mais precisamente, aqui $C \geqslant 1$) tal que $\|u\|_\Gamma \leqslant C\|u\|_E$, o que dá:

$$\|Tu_n - Tu\|_F = \|u_n - u\|_\Gamma - \|u_n - u\|_E \leqslant (C-1)\|u_n - u\|_E \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

provando a proposição. ∎

Observação 2.2.24. A primeira parte que demonstramos é trivial, e na verdade é válida para funções contínuas em espaços topológicos gerais; já a implicação de que basta ser o gráfico fechado para que o operador seja contínuo, limitado, é um verdadeiro corolário de Baire, no Lema 2.2.9. O difícil é justamente mostrar que, se u_n converge, então Tu_n não pode divergir. Veremos no Exemplo 5.1.5, no contexo de operadores não limitados, um operador A definido num subespaço $D(A) \subset E$ cujo gráfico é fechado, mas para qual exibiremos uma sequência u_n tal que Au_n divergirá. Evidentemente, o que falha nesse caso será o fato do domínio de A não ser completo, do contrário a Proposição 2.2.23 teria que valer.

[5]Como E e F são espaços possuidores de normas $\|\cdot\|_E$ e $\|\cdot\|_F$, podemos considerar a topologia produto em $E \times F$ como aquela gerada pela norma $\|(u, v)\|_{E\times F} = \|u\|_E + \|v\|_F$, com $(u, v) \in E \times F$.

Observação 2.2.25. Para demonstrar a continuidade de um operador T, em geral o que deve ser feito é tomar uma sequência u_n suposta convergente a u e provar que Tu_n de fato converge, e que converge a Tu. Ocorre que isso não é tão fácil de fazer quanto de dizer, e aí entra o resultado acima, permitindo-nos *supor a priori* a convergência de Tu_n, bastando demonstrar que seu limite será Tu. Ou seja, o trabalho cai pela metade: hipótese feita, teremos uma sequência convergente em $E \times F$; se o limite for efetivamente Tu, teremos um gráfico fechado, portanto continuidade do operador.

Para encerrar esta seção, falemos um pouco sobre uma conexão muito profunda entre geometria e topologia que existe em espaços de Banach (que será enunciada propriamente na Proposição 2.2.33 abaixo), que envolve características de seus duais e que esclarecerá um pouco a Observacão 2.1.31, sobre as importantes implicações da identidade do paralelogramo. Para tanto, ponhamos:

Definição 2.2.26 (Convexidade Uniforme)**.** Seja E um espaço com norma $\|\cdot\|$. E é dito ser *uniformemente convexo* se, para todo $\varepsilon > 0$, houver $\delta > 0$ tal que, dados quaisquer $u, v \in E$ com $\|u\| \leqslant 1$, $\|v\| \leqslant 1$, for $\left\|\frac{u+v}{2}\right\| < 1 - \delta$ desde que $\|u - v\| > \varepsilon$.

Observação 2.2.27. Em outras palavras, a bolas desse espaço devem ser estritamente convexas, pois dados dois vetores u, v quaisquer distintos pertencentes à bola unitária (ou a qualquer outra, por dilatação e translação), o ponto médio da soma $u + v$ deverá estar em seu interior, nem fora da bola (o que daria concavidade) nem em sua fronteira (caso de um conjunto convexo não estrito, que admitiria uma borda com segmentos retos, pensando num espaço euclidiano).

Exemplo 2.2.28. O plano cartesiano $\mathbb{R}^2$ com a norma euclidiana usual, dado $x = (x_1, x_2)$, $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, é uniformemente convexo, mostra-nos o próprio lugar geométrico do bordo da bola unitária centrada na origem, que é uma circunferência de raio unitário.

Exemplo 2.2.29. Como no Exemplo 2.2.28, tomamos como espaço o plano cartesiano $\mathbb{R}^2$, porém agora com a norma dada por $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$. A bola unitária centrada na origem, com essa norma, é um quadrado! Como toda bola, ainda é um conjunto convexo (a convexidade das bolas vem da desigualdade triangular, propriedade universal das normas), porém não mais uniformemente convexo, já que, se tomarmos u, v em uma das arestas do quadrado, teremos $\frac{u+v}{2}$ na mesma aresta, portanto não no interior da bola quadrada.

Observação 2.2.30. Como se ilustrou nos exemplos e, do mais, se podia ver da própria Definição 2.2.26, um espaço normado é uniformemente convexo quando a desigualdade triangular $\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$ valer estritamente para sua norma nos casos em que $u \neq v$.

Os Exemplos 2.2.28 e 2.2.29 são muito intrigantes, à medida que mostram que a convexidade uniforme é uma *propriedade geométrica* da norma, mas não uma *propriedade topológica*: ora, como sabemos, as normas exibidas nesses exemplos são equivalentes[6] e por isso produzem sobre $\mathbb{R}^2$ exatamente a mesma topologia, mesmo assim em um caso uma delas torna $\mathbb{R}^2$ uniformemente convexo, e no outro não.

De qualquer maneira, como já falado ao longo deste trabalho, nosso objetivo aqui não é explorar a fundo as propriedades geométricas dos espaços de Banach, nem sequer as topológicas, se nos distanciarem em demasiado dos espaços de Hilbert e da maneira como operadores sobre eles se comportam. No entanto, o resultado abaixo justifica sua presença

[6]Com efeito, repare que $\mathbb{R}^2$ é completo e $\|x\|_2 \leqslant \sqrt{2}\|x\|_\infty$, e aplique o Lema 2.2.22. Ou então somente lembre que, em dimensão finita, todas as normas são equivalentes, como comentado na Observação 2.2.4.

neste texto pelo curioso fato de correlacionar uma propriedade puramente geométrica, a convexidade uniforme, com outra topológica, a reflexividade[7]; além disso, ele será útil para o estudo dos espaços das funções integráveis, a serem discutidos no Capítulo 4.

Definição 2.2.31 (Reflexividade)**.** Um espaço vetorial normado E é dito *reflexivo* se for isomorfo a seu bidual E^{**} através da aplicação canônica dada na Equação (2.1.5).

Observação 2.2.32*.* O conceito de reflexividade depende explicitamente da injeção canônica. Com efeito, prova-se (vide a Referência [**?**]) que existem espaços de Banach isomorfos a seus biduais, inclusive com os isomorfismos preservando normas, e que mesmo assim não são reflexivos no sentido da Definição 2.2.31.

Proposição 2.2.33 (Milman-Pettis)**.** Seja E um espaço de Banach com norma $\|\cdot\|$ tal que E seja uniformemente convexo. Então E é reflexivo na topologia induzida por $\|\cdot\|$.

Para provar essa afirmação, faremos uso de um resultado técnico a ser apresentado propriamente no Capítulo 3, o Lema 3.2.25, mas que já aqui pode ser enunciado de maneira compreensível, se estabelecermos a notação: $B_E = \overline{B_E(\mathsf{o}, 1)}$, *i.e.*, a bola fechada unitária centrada no vetor nulo, e o mesmo para $B_{E^{**}}$.

Lema 2.2.34. Seja E um espaço de Banach. Dado $\xi \in B_{E^{**}}$, existe uma sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B_E$ tal que, para todo $\phi \in E^*$, tem-se $|\xi(\phi) - \phi(u_n)| \longrightarrow 0$.

Demonstração da Proposição 2.2.33. Consideremos a injeção canônica dada por $\tilde{u}(\phi) = \phi(u)$, $\forall\phi \in E^*$, a qual preserva normas (ver Proposição 2.1.41). Será suficiente mostrar que $\widetilde{B_E} = B_{E^{**}}$. Ora, já sabemos que $\widetilde{B_E} \subset B_{E^{**}}$; além do quê, a imagem $\widetilde{B_E}$ é fechada em E^{**}, pois se uma sequência $(\tilde{u}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \widetilde{B_E}$ converge a $\xi \in E^{**}$, então a sequência correspondente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ é de Cauchy, por isso convergente a um certo $u \in E$ que, prova-se, satisfaz $\xi = \tilde{u}$. Isso dito, bastará mostrar, na realidade, que $\widetilde{B_E}$ é densa em $B_{E^{**}}$. Em outras palavras, bastará mostrar que, se $\xi \in E^{**}$ com $\|\xi\|_{E^{**}} = 1$ (se for $\|\xi\|_{E^{**}} < 1$, normalize), então, para todo $\varepsilon > 0$, existirá $u \in B_E$ tal que $\|\xi - \tilde{u}\|_{E^{**}} \leqslant \varepsilon$.

Ora, escolha $\delta > 0$ tal que $\|\frac{u+v}{2}\|_E < 1 - \delta$ sempre que $\|u - v\|_E > \varepsilon$, com $\|u\|_E, \|v\|_E \leqslant 1$, e encontre $\phi \in E^*$, $\|\phi\|_{E^*} = 1$, tal que $\xi(\phi) > 1 - \frac{\delta}{2}$; ponha

$$A_1 = \left\{\zeta \in E^{**} \ : \ -\frac{\delta}{2} < (\xi(\phi) - \zeta(\phi)) < \frac{\delta}{2}\right\}.$$

Pelo Lema 2.2.34, $A_1 \bigcap \widetilde{B_E} \neq \emptyset$, portanto existe $u \in B_E$ tal que $\tilde{u} \in A_1$[8]. Afirmamos: isso implica que $\|\xi - \tilde{u}\|_{E^{**}} \leqslant \varepsilon$.

Com efeito, se fosse $\|\xi - \tilde{u}\|_{E^{**}} > \varepsilon$, teríamos $\xi \in E^{**} \setminus (\tilde{u} + \varepsilon B_{E^{**}})$; ocorre que $A_2 = E^{**} \setminus (\tilde{u} + \varepsilon B_{E^{**}})$ é aberto, portanto existe uma bola torno de ξ totalmente contida em A_2, e por uma nova aplicação do Lema 2.2.34 decorre que $A_1 \bigcap A_2 \bigcap \widetilde{B_E} \neq \emptyset$. Ou seja, existe $v \in B_E$ tal que $\tilde{v} \in A_1 \bigcap A_2$. Em particular, $\tilde{v} \in A_1$, portanto $\xi(\phi) - \tilde{z}(\phi) < \frac{\delta}{2}$ para $z \in \{u, v\}$, o que dá

$$2\xi(\phi) < \phi(u + v) + \delta \leqslant \|u + v\|_E + \delta;$$

[7] A reflexividade é uma propriedade topológica, pois os espaços duais, sendo aqueles dos funcionais lineares *contínuos* sobre o espaço inicial, dependem intrinsecamente da topologia do espaço inicial para se definir. Troque a norma dada por outra que produza a mesma topologia, e os duais continuarão os mesmos, portanto a propriedade de reflexividade se manterá.

[8] O lema dá que existirá $u \in B_E$ tal que $|\xi(\phi) - \tilde{u}(\phi)| < \frac{\delta}{2}$; para omitir o módulo e obter pertencimento a A_1, basta multiplicar u por uma fase complexa adequada (e eventualmente um fator de escala pequeno).

lembrando que $\xi(\phi) > 1 - \frac{\delta}{2}$, obtemos $\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_E > 1 - \delta$. Como E é uniformemente convexo, isso só pode ocorrer se $\|u - v\|_E \leqslant \varepsilon$. Essa afirmação é absurda, visto que também temos $\tilde{v} \in A_2 = E^{**} \setminus (\tilde{u} + \varepsilon B_{E^{**}})$, e portanto $\|u - v\|_E = \|\tilde{v} - \tilde{u}\|_{E^{**}} > \varepsilon$. ∎

Observação 2.2.35. A recíproca desse resultado não é verdadeira: com efeito, no Exemplo 2.2.29 apresentamos um espaço de Banach, $\mathbb{R}^2$ com a norma $\|\cdot\|_\infty$, que é reflexivo, como todo espaço de dimensão finita munido de qualquer norma, e mesmo assim não é uniformemente convexo.

Corolário 2.2.36. Seja E um espaço de Banach cuja norma satisfaça à identidade do paralelogramo (2.1.3). Então E é reflexivo.

Demonstração. Basta ver que uma norma que obedeça à identidade do paralelogramo produz um espaço uniformemente convexo. Verifique que, para todo $\varepsilon > 0$ cabível, tomando $\delta = 1 - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon}{2}}$, verifica-se $\left\|\frac{u+v}{2}\right\| < 1 - \delta$ para $u, v \in E$ com $\|u\| \leqslant 1$, $\|v\| \leqslant 1$, desde que $\|u - v\| > \varepsilon$; isso, uma vez que, nessas condições, a identidade nos dá $\left\|\frac{u+v}{2}\right\|^2 \leqslant 1 - \left\|\frac{u-v}{2}\right\|^2$. ∎

2.3 Espaços de Hilbert

Definição 2.3.1 (Espaço de Hilbert)**.** Seja E um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Diz-se que E é um *espaço de Hilbert* quando for completo em relação a $\langle\cdot,\cdot\rangle$ (mais precisamente, em relação à norma induzida $\|\cdot\|_{\langle,\rangle}$).

Ora, uma norma induzida por um produto interno satisfaz à identidade do paralelogramo (Proposição 2.1.30), portanto todo espaço de Hilbert é (uniformemente convexo e) reflexivo (Corolário 2.2.36, em que isso será provado de outra maneira), o que já mostra favorecer a presença do produto interno à obtenção de resultados sobre os espaços de Hilbert que os aproximem daqueles de dimensão finita. Isso vai mais longe: veremos ao longo desta seção como a introdução de uma noção de ortogonalidade no espaço de Banach, por meio de um produto interno compatível com sua completeza, dá-lhe uma estrutura geométrica quase idêntica à dos espaços euclidianos (idêntica mesmo, quando o espaço for separável), inclusive implicando que os espaços de Hilbert admitem decomposições ortogonais e são isomorfos a seus duais, além dos biduais.

Abordaremos tudo isso construtivamente, com resultados que se somarão passo a passo e que certamente relembrarão o estudante de muito do que conhece da Álgebra Linear e da geometria plana, a menos da necessidade de trabalhar com topologias, afinal as “somas infinitas” das combinações lineares de versores de uma base com infinitos elementos só podem ser compreendidas como limites de séries, jamais como uma operação puramente algébrica. Não à toa, as demonstrações apresentadas abaixo quase que invariavelmente inspiram-se em raciocínios geométricos, como se fossem meras adaptações “no limite da soma” do que se faz para espaços de dimensão finita, e por esse exato motivo a partir de agora o texto fica mais sucinto, a inspiração para os raciocínios que apresentaremos devendo ser buscada, muitas das vezes, em cursos de trigonometia, desenho geométrico, etc.

Proposição 2.3.2 (Decomposição Ortogonal)**.** Seja E um espaço de Hilbert, e $V \subset E$ um subespaço fechado. Então $E = V \oplus V^\perp$.

Demonstração. Vamos mostrar que, para todo $u \in E$, existe $\tilde{v} \in V$ que minimiza a distância $d_u = \inf_{v \in V} \|u - v\|_E$. Para tanto, tomemos uma sequência v_n em V tal que $\|v_n - v\|_E \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} d_u$. Essa é uma sequência de Cauchy, pois, pela regra do paralelogramo:

$$\left\|\frac{(u-v_n)+(u-v_m)}{2}\right\|_E^2 + \left\|\frac{(u-v_n)-(u-v_m)}{2}\right\|_E^2 = \frac{1}{2}\left(\|u-v_n\|_E^2 + \|u-v_m\|_E^2\right),$$

e considerando que $\frac{v_n+v_m}{2} \in V$, portanto $\left\|u - \frac{v_n+v_m}{2}\right\|_E \geqslant d_u$, fica evidente que:

$$0 \leqslant \left\|\frac{v_n - v_m}{2}\right\|_E^2 \leqslant \frac{1}{2}\left(\|u-v_n\|_E^2 + \|u-v_m\|_E^2\right) - d_u^2 \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Como V é um subespaço fechado de um espaço de Hilbert, é ele mesmo completo, portanto espaço de Hilbert, e consequentemente a sequência v_n converge a algum limite $\tilde{v}$, o qual minimiza d_u. O elemento minimizante é único, pois se duas sequências v_n e w_n minimizam d_u, então, pelo mesmo argumento acima, trocando v_m por w_n, conclui-se que $v_n - w_n$ converge a zero, portanto ambas as sequências convergem a $\tilde{v}$.

Agora escreveremos $u = \tilde{v} + (u - \tilde{v})$, e bastará mostrar que $u - \tilde{v} \in V^\perp$. Realmente, dado quaisquer $v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, sabemos que $\tilde{v} + \lambda v \in V$, portanto:

$$\|u - \tilde{v}\|_E^2 \leqslant \|u - (\tilde{v} + \lambda v)\|_E^2 = \|u - \tilde{v}\|_E^2 + |\lambda|^2\|v\|_E^2 - 2\mathrm{Re}\left(\lambda\left\langle v, u - \tilde{v}\right\rangle\right);$$

tomando $\lambda \in \mathbb{R}$ estritamente positivo, ou $\lambda = -i\alpha$ com $\alpha \in \mathbb{R}$ estritamente positivo, e lembrando-se que tais desigualdades são válidas inclusive para todo elemento de V, inclusive para $-u$, conclui-se que:

$$|\mathrm{Re}\left\langle v, u - \tilde{v}\right\rangle| \leqslant \frac{|\lambda|}{2}\|v\|_E^2 \quad \text{e} \quad |\mathrm{Im}\left\langle v, u - \tilde{v}\right\rangle| \leqslant \frac{|\alpha|}{2}\|v\|_E^2.$$

Assim, tomando λ e α suficientemente pequenos, vemos ser implicado $\langle v, u - \tilde{v}\rangle = 0$. ■

Observação 2.3.3. Na demonstração da Proposição 2.3.2, utilizamos a convexidade de V tanto para afirmar a existência (em que entrou a identidade do paralelogramo) quanto a unicidade do elemento $\tilde{v}$ que minimiza $\|u - v\|$ para $v \in V$; o fechamento apenas garantiu que v pertencesse de fato a V.

Corolário 2.3.4. Seja E um espaço de Hilbert, $V \subset E$ um subespaço, e F um espaço de Banach. Seja $B \in \mathcal{L}(V, F)$. Existe um operador $\tilde{B} \in \mathcal{L}(E, F)$ tal que $\tilde{B}u = Bu$ para todo $u \in V$ e $\|\tilde{B}\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \|B\|_{\mathcal{L}(V,F)}$.

Demonstração. Trivial, vide Observação 2.1.48. ■

Observação 2.3.5. Graças a esse corolário, pode-se por hipótese supor que o domínio de operadores limitados é sempre o espaço todo; já para operadores não limitados esse fato não se sustenta, e será essencial, quando formos falar deles no Capítulo 9, especificar os domínios.

Corolário 2.3.6. Seja E um espaço de Hilbert, e $V \subset E$ um subespaço qualquer. Então vale $\overline{V} = \left(V^\perp\right)^\perp$.

Demonstração. Da Proposição 2.1.35, já sabemos que $\overline{V} \subset \left(V^{\perp}\right)^{\perp}$. Para demonstrar a inclusão contrária, lembremos ainda que $\overline{V}^{\perp} = V^{\perp}$ e decomponhamos $E = \overline{V} \oplus V^{\perp}$; outra decomposição possível é $E = \left(V^{\perp}\right)^{\perp} \oplus V^{\perp}$, pois $V^{\perp}$ é sempre fechado, pela Proposição 2.1.34. Assim, dado $u \in \left(V^{\perp}\right)^{\perp}$ arbitrário, há $\tilde{u} = u + u_2 \in E$, com $u_2 \in V^{\perp}$ e, por outro lado, $\tilde{u} = u_3 + u_4$, com $u_3 \in \overline{V}$ e $u_4 \in V^{\perp}$. Calculamos:

$$\tilde{u} - \tilde{u} = (u - u_3) + (u_2 - u_4) = 0,$$

e como $u - u_3 \in \left(V^{\perp}\right)^{\perp}$ e $u_2 - u_4 \in V^{\perp}$, tomamos o produto interno dessa expressão acima por $u - u_3$ e concluímos que $u = u_3$. Mas isso significa que $u_3 \in \overline{V}$, e o corolário fica demonstrado. ■

Corolário 2.3.7. Seja E um espaço de Hilbert e $V \subset E$ fechado. Então todo elemento $u \in E$ escreve-se, de maneira única, como $u = u_V + u_{V^{\perp}}$, em que $u_V \in V$ e $u_{V^{\perp}} \in V^{\perp}$.

Demonstração. A existência da decomposição $u = u_V + u_{V^{\perp}}$ vem da Proposição 2.3.2. A unicidade da seguinte observação: se for também $u = \tilde{u}_V + \tilde{u}_{V^{\perp}}$, com $\tilde{u}_V \in V$ e $\tilde{u}_{V^{\perp}} \in V^{\perp}$, então $u - u = (u_V - \tilde{u}_V) + (u_{V^{\perp}} - \tilde{u}_{V^{\perp}}) = 0$. Mas isso significa que $(u_V - \tilde{u}_V) = -(u_{V^{\perp}} - \tilde{u}_{V^{\perp}})$, e como $V \cap V^{\perp} = \{0\}$, segue que $u_V = \tilde{u}_V$ e $u_{V^{\perp}} = \tilde{u}_{V^{\perp}}$. ■

Corolário 2.3.8. Mantendo a notação do corolário anterior, a função

$$\mathbb{P}_V : E \ni u \longmapsto u_V \in V \subset E \tag{2.3.1}$$

é linear e limitada. Além disso, $\mathbb{P}_V + \mathbb{P}_{V^{\perp}} = \mathbb{1}$ e $\mathbb{P}_V \mathbb{P}_{V^{\perp}} = \mathbb{P}_{V^{\perp}} \mathbb{P}_V = 0$. Por fim, se $V \neq \{0\}$, então $\|\mathbb{P}_V\|_{\mathcal{L}(E)} = 1$.

Demonstração. A linearidade é obvia, assim como $\mathbb{P}_V + \mathbb{P}_{V^{\perp}} = \mathbb{1}$. Agora, relembrando que a decomposição de $u \in E = V \oplus V^{\perp}$, quando $u \in V$, é $u = u + 0$, fica evidente que $\mathbb{P}_{V^{\perp}} \mathbb{P}_V = 0$; *mutatis mutandis* para $\mathbb{P}_V \mathbb{P}_{V^{\perp}} = 0$. Além disso, tem-se $u_V = u - u_{V^{\perp}}$, por isso vemos que $\|u_V\|_E \leqslant \|u\|_E + \|u_{\mathbb{P}_{V^{\perp}}}\|_E \leqslant \|u\|_E$, e daí $\frac{\|u_V\|_E}{\|u\|_E} \leqslant 1$ se $u \neq 0$, portanto $\|\mathbb{P}_V\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant 1$. A igualdade vem de tomarmos $u \in V$ não nulo, situação em que $\mathbb{P}_V u = u$. ■

Definição 2.3.9 (Projeção Ortogonal)**.** Seja E um espaço de Hilbert e $V \subset E$ um subespaço fechado. O operador $\mathbb{P}_V$ definido em (2.3.1) é chamado de *projetor ortogonal* sobre V.

Proposição 2.3.10. Seja $\mathbb{P} : E \longrightarrow E$ uma operador linear sobre um espaço de Hilbert E. Então, $\mathbb{P}$ é uma projeção ortogonal sobre um subespaço fechado $V \subset E$ se e somente se $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}$ e, para quaisquer $u, v \in E$, verificar-se $\langle \mathbb{P}u, v \rangle = \langle u, \mathbb{P}v \rangle$.

Demonstração. Se $\mathbb{P}$ for projeção sobre algum subespaço fechado V, então pomos $E = V \oplus V^{\perp}$ e, dados $u, v \in E$, tem-se:

$$\langle \mathbb{P}u, v \rangle = \langle u_V, v_V + v_{V^{\perp}} \rangle = \langle u_V, v_V \rangle = \langle u_V + u_{V^{\perp}}, v_V \rangle = \langle u, \mathbb{P}v \rangle$$

e $\mathbb{P}^2 u = \mathbb{P}u_V = u_V$, pois a decomposição $V \oplus V^{\perp}$ de u_V é trivialmente $u_V = u_V + 0$, e como $u_V = \mathbb{P}u$, segue que $\mathbb{P}^2 u = \mathbb{P}u$ para todo $u \in E$. Agora mostremos a afirmação inversa.

Primeiramente, se $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}$ e, se para quaisquer $u, v \in E$ satisfizer $\mathbb{P}$ a condição $\langle \mathbb{P}u, v\rangle = \langle v, \mathbb{P}u\rangle$, então $\mathbb{P}$ é limitado, pois:

$$\|\mathbb{P}u\|_E^2 = \langle \mathbb{P}u, \mathbb{P}u\rangle = \left\langle \mathbb{P}^2 u, u\right\rangle = \langle \mathbb{P}u, u\rangle \leqslant \|\mathbb{P}u\|_E \|u\|_E,$$

do que $\sup_{\substack{u\in E\\ u\neq 0}} \frac{\|\mathbb{P}u\|_E}{\|u\|_E} \leqslant 1$. Isso permitirá dizer que $\operatorname{ran}(\mathbb{P})$ é um subespaço fechado: seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\operatorname{ran}(\mathbb{P})$ convergente a um certo $u \in E$. Como $\mathbb{P}$ é contínuo pelo que acabamos de ver, a sequência $\mathbb{P}u_n$ converge a Pu; ocorre que existem $v_n \in E$ tais que $u_n = \mathbb{P}v_n$, portanto $\mathbb{P}u_n = \mathbb{P}^2 v_n = \mathbb{P}v_n = u_n$, ou seja, $u_n \longrightarrow \mathbb{P}u \in \operatorname{ran}(\mathbb{P})$.

Isso significa que podemos decompor o espaço de Hilbert como $E = \operatorname{ran}(\mathbb{P}) \oplus (\operatorname{ran}(\mathbb{P}))^\perp$. Afirmamos que $\mathbb{P}$ é a projeção ortogonal sobre $\operatorname{ran}(\mathbb{P})$. Para verificá-lo, basta notar que $(\operatorname{ran}(\mathbb{P}))^\perp = \ker(\mathbb{P})$:

- se $u \in \ker(\mathbb{P})$, para qualquer $v \in E$ temos $\langle \mathbb{P}u, v\rangle = \langle u, \mathbb{P}v\rangle = 0$, isto é, $u \in (\operatorname{ran}(\mathbb{P}))^\perp$;
- se $u \in (\operatorname{ran}(\mathbb{P}))^\perp$, para qualquer $v \in E$ temos $\langle u, \mathbb{P}v\rangle = \langle \mathbb{P}u, v\rangle = 0$, em particular para $v = \mathbb{P}u$, do que se conclui $\mathbb{P}u = 0$, ou seja, $u \in \ker(\mathbb{P})$.

Assim obtemos que $E = \ker(\mathbb{P}) \oplus \operatorname{ran}(\mathbb{P})$, portanto, dado $u \in E$ arbitrário, escreve-se $u = \mathbb{P}_{\ker(\mathbb{P})}u + \mathbb{P}_{\operatorname{ran}(\mathbb{P})}u$, e como $\mathbb{P}_{\ker(\mathbb{P})}u \in \ker(\mathbb{P})$ e $\mathbb{P}_{\operatorname{ran}(\mathbb{P})}u \in \operatorname{ran}(\mathbb{P})$ (e sobre sua imagem $\mathbb{P}$ age como a identidade, como temos visto), segue finalente que $\mathbb{P}u = \mathbb{P}_{\operatorname{ran}(\mathbb{P})}u$, o que equivale a dizer que $\mathbb{P}$ é o projetor sobre o subespaço fechado $V = \operatorname{ran}(\mathbb{P})$ ■

Observação 2.3.11. A Proposição 2.3.10 leva muitas referências a definirem um projetor ortogonal como sendo simplesmente um operador linear tal que $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}$ e, dados $u, v \in E$, $\langle \mathbb{P}u, v\rangle = \langle u, \mathbb{P}v\rangle$, sem mencionar o espaço sobre o qual ele projeta. É importante notar, porém, que exite uma bijeção entre esses operadores e os subespaços fechados de E, e que eles atuam "selecionando" a componente u_V nesses subespaços de vetores $u \in E$.

Proposição 2.3.12 (Representação de Riesz). Seja E um espaço de Hilbert com o produto interno $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$. Tome-se $\phi \in E^*$; então existe um único $v_\phi \in E$ tal que, para todo $u \in E$, tem-se $\phi(u) = \langle u, v_\phi\rangle$.

Demonstração. Tomemos $\ker(\phi) = \{u \in E : \phi(u) = 0\}$. Como sabemos, $\ker(\phi)$ é um subespaço vetorial (ϕ é linear) fechado (ϕ é contínuo e $\{0\}$ é um fechado de $\mathbb{R}$), portanto $E = \ker(\phi) \oplus (\ker(\phi))^\perp$. Se $E = \ker(\phi)$, então tomemos $v_\phi = 0$ e a proposição fica satisfeita. Se não, existirá $w \in (\ker(\phi))^\perp$ não nulo; ponha-se $x = u - \frac{\phi(u)}{\phi(w)}w$, que, verifica-se, satisfaz $\langle x, w\rangle = 0$. Assim:

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle u - \frac{\phi(u)}{\phi(w)}w, w\right\rangle \\ &= \langle u, z\rangle - \frac{\phi(u)}{\phi(w)}\langle w, w\rangle \quad \Rightarrow \quad \phi(u) = \frac{\phi(w)}{\langle w, w\rangle}\langle u, w\rangle\,, \end{aligned}$$

e a existência de v_ϕ fica provada tomando-se $v_\phi = \overline{\frac{\phi(z)}{\langle z, z\rangle}}z$. Quanto à unicidade, repare que se for $\phi(u) = \langle u, v_\phi\rangle$ e $\phi(u) = \langle u, \tilde{v}_\phi\rangle$ para qualquer $u \in E$, então, subtraindo as duas expressões e escolhendo $u = v_\phi - \tilde{v}_\phi$, sobra $\|v_\phi - \tilde{v}_\phi\|^2 = 0$, do que $v_\phi = \tilde{v}_\phi$. ■

Corolário 2.3.13 (Unicidade do produto interno)**.** Seja E um espaço de Hilbert com o produto interno $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$. Seja $[\,\cdot\,,\cdot\,]$ um outro produto interno em E, bicontínuo com relação à norma induzida por $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$. Então existe $B \in \mathcal{L}(E)$ tal que, para quaisquer $u, v \in E$, verifica-se $[u, v] = \langle u, Bv\rangle$.

Observação 2.3.14. Na Proposição 2.4.6 e em seu Corolário 2.4.8 à frente, esse resultado será melhorado e generalizado para *formas sesquilineares* sobre $\mathcal{H}$, ou seja, formas sobre $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ lineares em uma coordenada e antilineares na outra (repare que o produto interno é um caso específico de forma sesquilinear).

Demonstração. Primeiramente fixemos $v \in E$ e verifiquemos que a função $E \ni u \longmapsto [u, v] \in \mathbb{C}$ é um funcional linear pertencente a E^*; pela representação de Riesz, existe um vetor $w_v \in E$ tal que, $\forall v \in E$, $[u, v] = \langle u, w_v\rangle$. A seguir, verificamos que a aplicação $E \ni v \longmapsto w_v \in E$ é linear e limitada, portanto $w_v = Bv$, com $B \in \mathcal{L}(E)$. ■

Exemplo 2.3.15. dar exemplo de produto interno não bicontínuo que não respeita a unicidade

Corolário 2.3.16. Seja E um espaço de Hilbert. Então ele é isomorfo a seu dual através da aplicação $\dagger : E \ni v \longmapsto \langle\,\cdot\,, v\rangle \in E^*$, $E \sim_\dagger E^*$.

Demonstração. Usando a representação de Riesz, sabemos que é uma bijeção o mapa $E^* \ni \phi \longmapsto v_\phi \in E$, em que $\phi = \langle\,\cdot\,, v_\phi\rangle$. Que ela é de fato isomorfa (*i.e.*, que $v_{\phi+\lambda\varphi} = v_\phi + \lambda v_\varphi$) verifica-se de maneira direta, lembrando da multiplicação por escalar intoduzida em E^* por (2.1.4) ■

Definição 2.3.17 (Adjunção)**.** Seja E um espaço de Hilbert. O isomorfismo

$$\dagger : E \ni v \longmapsto \langle\,\cdot\,, v\rangle \in E^*$$

é chamado de operação de *adjunção* em E; $u^\dagger \in E^*$ é dito o *adjunto* de $u \in E$.

Exemplo 2.3.18. Um espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é completo em relação à norma euclidiana usual; tomemo-lo na representação em que seus elementos são vetores de tipo coluna. O produto interno usual é $\langle x_1, x_2\rangle = {}^t x_2\, x_1$, em que ${}^t x_2$ é o transposto de x_2, *i.e.*, o vetor tipo linha correspondente, e a multiplicação é a usual entre matrizes. Esse produto, aliás, induz a norma euclidiana usual, fazendo de $\mathbb{R}^n$ um espaço de Hilbert. Assim, a operação de adjunção em $\mathbb{R}^n$ nada mais é que a transposição, e vemos claramente como o dual de $\mathbb{R}^n$ enquanto espaço de vetores tipo coluna é o próprio $\mathbb{R}^n$, mas como espaço de vetores tipo linha.

Exemplo 2.3.19. Sobre os números complexos ($\mathbb{C}$ é um espaço de Hilbert), a operação de adjunção nada mais é que a conjugação complexa. Com efeito, é o produto interno $\langle z_1, z_2\rangle_{\mathbb{C}} = z_1\overline{z_2}$ que induz a norma módulo, $\|z\|_{\mathbb{C}} = |z|$, na qual $\mathbb{C}$ é completo. Se, ao invés de $\mathbb{R}^n$ (espaço das listas de n locos sobre o corpo $\mathbb{R}$), tomarmos $\mathbb{C}^n$ (listas de n locos, mas sobre o corpo $\mathbb{C}$), vemos de maneira análoga que o adjunto de $v \in \mathbb{C}^n$ será $v^\dagger = {}^t\overline{v}$, ou seja, a combinação das operações de transposição e conjugação complexa.

Observação 2.3.20. Nos Exemplos 2.3.18 e 2.3.19 vimos a relação estreita entre a operação de adjunção e às de transposição e conjugação complexa. Essa relação tornar-se-á ainda mais forte quando apresentarmos o conceito de adjunto de um operador e virmos que será precisamente o análogo do adjunto das matrizes (reais ou complexas), que é nada menos que a matriz transposta e, no caso complexo, conjugada. A adjunção pode, portanto, ser entendida como uma generalização dessas operações familiares em Álgebra Linear, e será usada para os mesmos fins, em contextos paralelos.

Corolário 2.3.21. Seja E um espaço de Hilbert; defina-se a função $\|\cdot\|_{E^*} : E^* \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ por

$$\|u^\dagger\|_{E^*} = \|u\|_E \quad \forall u^\dagger \in E^*.$$

Segue que $\|\cdot\|_{E^*}$ é uma norma em E^*, e $\|\cdot\|_{E^*} = \|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,\mathbb{C})}$.

Demonstração. Basta demonstrar que $\|\cdot\|_{E^*}$ coincide com a norma $\mathcal{L}(E,\mathbb{C})$. Com efeito:

$$\|u^\dagger\|_{\mathcal{L}(E,\mathbb{C})} = \sup_{\substack{v\in E\\ v\neq 0}} \frac{|u^\dagger v|}{\|v\|} = \sup_{\substack{v\in E\\ v\neq 0}} \frac{|\langle v,u\rangle|}{\|v\|} \leqslant \|u\|_E = \|u^\dagger\|_{E^*};$$

por outro lado, tomando $v = u$ na fórmula $\|Bv\| \leqslant \|B\|\,\|v\|$, que serve para qualquer operador linear limitado, inclusive $B = u^\dagger$, segue que $\|u^\dagger\|_{E^*} = \|u\|_E \leqslant \|u^\dagger\|_{\mathcal{L}(E,\mathbb{C})}$, do que a identidade que buscávamos. ■

Corolário 2.3.22. Seja E um espaço de Hilbert; defina-se a função $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle_{E^*} : E^* \times E^* \longrightarrow \mathbb{C}$ por

$$\left\langle u^\dagger, v^\dagger \right\rangle_{E^*} = \langle v, u\rangle \quad \forall u^\dagger, v^\dagger \in E^*.$$

Segue que $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle_{E^*}$ é um produto interno em E^*, e $\left\langle u^\dagger, u^\dagger\right\rangle = \|u^\dagger\|_{E^*}^2$ para qualquer $u^\dagger \in E^*$.

Demonstração. Óbvia, lembrando-se da regra de multiplicação por escalar em E^* dada por (2.1.4). ■

Observação 2.3.23. Ora, como é o produto interno $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle_{E^*}$ acima explicitado que induz a norma natural em E^*, essa só pode ser, também, uma definição natural de produto interno para o espaço dual.

Corolário 2.3.24. Seja E um espaço de Hilbert e $\dagger$ sua operação de adjunção. Verifica-se:

1. $\dagger$ é um operador linear limitado de norma 1, $\|\dagger\|_{\mathcal{L}(E,E^*)} = 1$;

2. o adjunto é seu próprio inverso[9], no sentido que, dado $u \in E$, para qualquer $\phi \in E^*$ tem-se $(u^\dagger)^\dagger(\phi) = \phi(u)$ e, se $(u^\dagger)^\dagger(\phi) = \phi(w)$ para algum $w \in E$, então $w = u$.

Demonstração. O item (1) é óbvio, tendo em vista a caracterização da norma de E^* no Corolário 2.3.22. O item (2) vem de aplicar corretamente a adjunção do espaço E^* a seu dual, que é bidual de E:

$$(u^\dagger)^\dagger v^\dagger = \left\langle v^\dagger, u^\dagger\right\rangle_{E^*} = \langle u, v\rangle = v^\dagger u;$$

ademais, se fosse $(u^\dagger)^\dagger v^\dagger = v^\dagger w$ para qualquer $v^\dagger$, então ter-se-ia $\langle u - w, v\rangle = 0$, o que implica $u = w$ tomando $v = u - w$. ■

[9]Mais precisamente, a composição do adjunto consigo mesmo, $\dagger \circ \dagger$, é o endomorfismo canônico (2.1.5) entre E e sua cópia no bidual E^{**}.

Observação 2.3.25. Lembrando-se que a adjunção em $\mathbb{C}$ é simplesmente a conjugação complexa, usamos o fato do adjunto ser seu próprio inverso para definir a seguinte regra operatória[10]: $(u^\dagger v)^\dagger = v^\dagger u$; temos também, para cada vetor teste $w \in E$, $(u + \alpha v)^\dagger w = u^\dagger w + \overline{a} v^\dagger w$, em que, relembremos, $\overline{a} = a^\dagger$ em $\mathbb{C}$. Essas propriedades distributivas são análogas às da transposição e tão úteis quanto.

Corolário 2.3.26. Todo espaço de Hilbert é reflexivo.

Demonstração. Pelo Corolário 2.3.16, $\dagger$ é um isomorfismo entre E e E^*, daí $\dagger \circ \dagger$ ser um isomorfismo entre E e E^{**}. No entanto, como vimos à Nota 9, esse não é qualquer isomorfirmo, mas o canônico dado à Equação 2.1.5 e requerido pela Definição 2.2.31 de reflexividade. ∎

Observação 2.3.27. Segundo nosso estudo, em última instância a reflexividade do espaço de Hilbert derivou da representação de Riesz, que derivou da existência de projeções ortogonais, que derivou da possibilidade de escrever $E = V \oplus V^\perp$ para um subespaço V fechado vista na Proposição 2.3.2, onde se utilizou a identidade do paralelogramo satisfeita pelo produto interno, o que é equivalente a dizer que ele é compatível com a norma que torna o espaço completo, como havíamos visto (Proposição 2.1.30). Igualmente, no começo desta seção havíamos reparado que a presença de um produto interno, cuja norma sempre satisfaz ao paralelogramo, torna o espaço uniformemente convexo, e que daí também deriva, por um caminho bem diferente a reflexividade.

Esse caminho é também muito mais complicado, não à toa a Proposição 2.2.33 necessitou do uso de topologias que nem sequer foram introduzidas ainda e dependeu de um resultado que só será provado no Capítulo 3 e que acima foi reenunciado com uma linguagem simplificada (trocando topologias fracas por convergências pontuais), o Lema 2.2.34. Isso ilustra bem o grande problema da Análise Funcional: alguns espaços parecem gozar de propriedades análogas àqueles de dimensão finita quando se analisam exemplos concretos, no entanto provar que isso é em geral verdadeiro mostra-se muitíssimo mais difícil em razão da falta de estruturas e noções geométricas (no caso a ortogonalidade, advinda do produto interno) que nos espaços euclidianos aparecem de maneira natural.

Observação 2.3.28. Sabíamos que $E \sim_\dagger E^*$ (ainda que com uma multiplicação por escalar em E^* estranha; sem ela, E e E^* seriam antiisomorfos)[11]. De todo modo, a escolha de representar o adjunto na segunda variável do produto interno, que é antilinear, permite-nos identificar sem maiores comentários o espaço de Hilbert com o seu dual, do que denotaremos ambos simplesmente por $\mathcal{H}$, não faremos distinção entre elementos de um ou outro espaço, nem continuaremos a usar o símbolo $\dagger$ para vetores.

Essas noções e resultados basicamente exaurem aquilo que, num nível ainda introdutório, interessa obter das características geométricas dos espaços de Hilbert. Entretanto, um fato fundamental dos espaços de dimensão finita $\mathbb{R}^n$ é possuírem uma base ortonormal, isto é, um conjunto de n vetores $\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_n\}$ todos de norma unitária e dois a dois ortogonais, $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}$, que gera o espaço inteiro: dado $u \in \mathbb{R}^n$, então $u = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k$, em que $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, são coeficientes escalares.

[10] O segundo símbolo $\dagger$ a aparecer refere-se à adjunção em $\mathbb{C}$, como somente poderia, pois $u^\dagger v \in \mathbb{C}$. É fato que misturamos dois tipos de adjunto distintos sob o mesmo símbolo, o em $\mathbb{C}$ e o em um $\mathcal{H}$ arbitrário; o mais correto seria dizer $\overline{u^\dagger v} = v^\dagger u$, mas a fórmula como deixamos parece mais expressiva.

[11] Adicionalmente, vimos que $\dagger$ preserva normas, produtos internos e é em certo sentido seu próprio inverso, do que $E \sim_{\dagger\circ\dagger} E^{**}$ sem multiplicação por escalar estranha!

Observação 2.3.29. Quando todo elemento u de um espaço vetorial V puder ser escrito como combinação linear *finita* de elementos de um subconjunto $\mathcal{B} \subset V$, diz-se que $\mathcal{B}$ gera V e denota-se $V = \mathrm{span}(\mathcal{B})$.

Há diversas noções distintas de base de um espaço vetorial, a que mais se aproxima do conceito em dimensão finita e que nos permitirá demonstrar resultados análogos aos de dimensão finita é:

Definição 2.3.30 (Base Hilbertiana)**.** Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_n...\} \subset \mathcal{H}$ um conjunto enumerável ortonormal, *i.e.*, tal que, $\forall n, m \in \mathbb{N}$, seja $\langle e_n, e_m \rangle = \delta_{n,m}$. $\mathcal{B}$ é uma *base hilbertiana* de $\mathcal{H}$ se, para todo $u \in \mathcal{H}$, houver uma sequência $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{C}$ tal que:

$$\left\| u - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\|_{\mathcal{H}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

caso em que escrevemos $u = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n e_n$.

Observação 2.3.31. O leitor pode tomar como ponto de partida para uma introdução muito rápida e prática a outros tipos de base de espaços vetoriais (como Hamel e Schauder) e suas propriedades elementares a referência [4].

Proposição 2.3.32. Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_n, ...\}$ uma base hilbertiana. Então tem-se:

$$u = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle u, e_n \rangle \, e_n$$

para qualquer $u \in \mathcal{H}$.

Demonstração. Por hipótese, existe uma sequência α_k complexa tal que $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$ converge a u na norma $\mathcal{H}$. Pela continuidade e sesquilinearidade do produto interno temos:

$$\langle u, e_m \rangle = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \langle e_k, e_m \rangle = \alpha_m,$$

o que prova a proposição. ■

Observação 2.3.33. Seja $\{e_1, ..., e_n\}$ um conjunto ortonormal qualquer, mas finito. Verifica-se diretamente que o operador $P = \sum_{k\in 1}^{n} e_k e_k^{\dagger}$ (mais claramente, o operador dado por $Pu = \sum_{k=1}^{n} \langle u, e_k \rangle e_k$) satisfaz $P^2 = P$ e $\langle Pu, v \rangle = \langle u, Pv \rangle$ para todos $u, v \in \mathcal{H}$; como $\mathrm{ran}(P) = \mathrm{span}\{e_1, ..., e_n\}$ (um espaço fechado, como deveria), vê-se que é o projetor ortogonal sobre o espaço $\mathrm{span}\{e_1, ..., e_n\}$.

Proposição 2.3.34. Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert, $\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_n, ...\}$ uma base hilbertiana e $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathbb{C}$. Então $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n e_n = u$ para algum $u \in \mathcal{H}$ se e somente se $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n|^2 < \infty$. Nesse caso, será:

$$\|u\|_{\mathcal{H}} = \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n|^2}. \tag{2.3.2}$$

Demonstração. Definamos a sequência $s_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$. Se $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n|^2 < \infty$, s_n é uma sequência de Cauchy:

$$\|s_n - s_m\|_{\mathcal{H}}^2 = \left\| \sum_{k=m}^{n} \alpha_k e_k \right\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{k=m}^{n} |\alpha_k|^2 \leqslant \sum_{k=m}^{\infty} |\alpha_k|^2,$$

e o último membro das desigualdades vai a 0 com $m < n$ suficientemente grandes porque o final de uma série absolutamente convergente deve ser pequeno. Como $\mathcal{H}$ é completo, existe $u \in \mathcal{H}$ tal que $s_n \longrightarrow u$.

Inversamente, se $u = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n e_n$, então:

$$0 \leqslant \left| \|u\|_{\mathcal{H}} - \left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\|_{\mathcal{H}} \right| \leqslant \left\| u - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\|_{\mathcal{H}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

mostrando que $\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 = \|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\|_{\mathcal{H}}^2 \longrightarrow \|u\|_{\mathcal{H}}^2$ conforme $n \longrightarrow \infty$. Isso significa tanto que $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n|^2$ converge, quanto que $\|u\|_{\mathcal{H}} = \sqrt{\sum_{n\in\mathcal{H}} |\alpha_n|^2}$. ∎

Observação 2.3.35. A Equação (2.3.2) mostra que a norma do produto interno é uma generalização da norma euclidiana; ela é por vezes chamada de *fórmula de Pitágoras generalizada*.

Corolário 2.3.36. Usando a mesma notação de acima, $\|u\|_{\mathcal{H}} = \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle u, e_n\rangle|^2}$.

Agora falta apenas saber em que condições um espaço de Hilbert admite uma base ortonormal enumerável. Veremos que isso sempre ocorre para espaços separáveis:

Definição 2.3.37 (Separabilidade)**.** Seja E um espaço vetorial. E é dito separável se houver um subconjunto $E' \subset E$ enumerável e denso em E, *i.e.*, tal que $\overline{E'} = E$.

Observação 2.3.38. Não vamos aqui explorar as características de espaços de Banach separáveis, embora vários resultados existam sobre eles. O leitor interessado pode consultar, por exemplo, a referência [3].

Proposição 2.3.39 (Existência de base hilbertiana)**.** Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert de dimensão não finita. Então $\mathcal{H}$ admitirá uma base hilbertiana se e somente se for separável.

Demonstração. Suponhamos $\mathcal{H}$ separável, e seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma coleção de elementos de $\mathcal{H}$ densa. Para todo $n \in \mathbb{N}$, definimos $E_n = \operatorname{span}(\{u_1, ..., u_n\})$, que será um espaço de dimensão finita; como $u_n \in E_n$ para todo n, o conjunto $\cup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ é denso em $\mathcal{H}$. Agora tomamos qualquer vetor unitário $e_1 \in E_1$, definimos $\mathcal{B}_1 = \{e_1\}$ e, supondo $\mathcal{B}_n$ definido, instituímos:

- se $E_{n+1} \neq E_n$, escolhemos pelo processo de ortonormalização de Gram-Schmidt um elemento unitário $e_{n+1} \in E_{n+1}$ tal que $\langle e_{n+1}, e_k\rangle = 0$ para todo $k \leqslant n$, e pomos $\mathcal{B}_{n+1} = \mathcal{B}_n \cup \{e_{n+1}\}$;

- se $E_{n+1} = E_n$, escolhemos $e_{n+1} = 0$ e $\mathcal{B}_{n+1} = \mathcal{B}_n$.

Observe-se que, para todo n, $E_n = \operatorname{span}(\mathcal{B}_n)$. Definimos por fim $\mathcal{B} = \cup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n \setminus \{0\}$ e afirmamos: $\mathcal{B}$ é uma base hilbertiana de $\mathcal{H}$.

Com efeito, $\mathcal{B}$ é por construção um conjunto ortonormal enumerável (união enumerável de conjuntos enumeráveis); por comodidade, vamos reenumerar seus elementos em bijeção com $\mathbb{N}$, $\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_n, ...\}$, o que ainda garante $E_n \subset \operatorname{span}(\{e_1, ..., e_n\})$. Continuando, temos que $\cup_{n\in\mathbb{N}} E_n = \operatorname{span}(\mathcal{B})$, e, dado qualquer $v \in \mathcal{H}$, existe uma sequência $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ em $\cup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ (que, como vimos, é denso) tal que $v_m \longrightarrow v$. Acontece que, para cada v_m, existe $N_m \in \mathbb{N}$ tal que $v_m \in E_{N_m}$, portanto $\langle v_m, e_k\rangle = 0$ para todo $k > N_m$, do que:

$$v_m = \sum_{k=1}^{N_m} \langle v_m, e_k\rangle\, e_k = \sum_{k=1}^{\infty} \langle v_m, e_k\rangle\, e_k.$$

Além disso, $\langle v_m, e_k\rangle$ converge a $\langle v, e_k\rangle$ uniformemente em relação a k, como podemos ver por $|\langle v - v_m, e_k\rangle| \leqslant \|v - v_m\|_{\mathcal{H}}$; ademais, como, o operador $\sum_{k=1}^{n} e_k e_k^{\dagger}$ é o projetor ortogonal sobre o espaço $\operatorname{span}\{e_1, ..., e_n\}$ (ver a Observação 2.3.33), tem-se ainda $\|\sum_{k=1}^{n} \langle u, e_k\rangle\, e_k\|_{\mathcal{H}} \leqslant \|u\|_{\mathcal{H}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $u \in \mathcal{H}$. Com esses fatos em mente, podemos estimar, com m arbitrário:

$$\begin{aligned}
&\left\| v - \sum_{k=1}^{n} \langle v, e_k\rangle\, e_k \right\|_{\mathcal{H}} \\
&\quad = \left\| (v - v_m) + \left(v_m - \sum_{k=1}^{n} \langle v_m, e_k\rangle\, e_k \right) + \left(\sum_{k=1}^{n} \langle v_m - v, e_k\rangle\, e_k \right) \right\|_{\mathcal{H}} \\
&\quad \leqslant \|v - v_m\|_{\mathcal{H}} + \left\| \sum_{k=1}^{n} \langle v_m - v, e_k\rangle\, e_k \right\|_{\mathcal{H}} + \left\| v_m - \sum_{k=1}^{n} \langle v_m, e_k\rangle\, e_k \right\|_{\mathcal{H}} \\
&\quad \leqslant 2\|v - v_m\|_{\mathcal{H}} + \left\| v_m - \sum_{k=1}^{n} \langle v_m, e_k\rangle\, e_k \right\|_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

Resulta que, tomando m suficientemente grande para que seja $\|v - v_m\|_{\mathcal{H}} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, teremos

$$\left\| v - \sum_{k=1}^{n} \langle v, e_k\rangle\, e_k \right\|_{\mathcal{H}} \leqslant \varepsilon + \left\| v_m - \sum_{k=1}^{n} \langle v_m, e_k\rangle\, e_k \right\|_{\mathcal{H}},$$

e tomando $n \geqslant N_m$, teremos finalmente $\|v - \sum_{k=1}^{n} \langle v, e_k\rangle\, e_k\|_{\mathcal{H}} \leqslant \varepsilon$. Em resumo: $v = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n e_n$, com $\alpha_n = \langle v, e_n\rangle$, mostrando que $\mathcal{B}$ é uma base hilbertiana.

Para demonstrar a afirmação inversa, suponhamos que $\mathcal{H}$ possua uma base hilbertiana $\mathcal{B}$ e definamos o conjunto $\operatorname{span}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{B})$ como aquele das combinações lineares finitas de elementos de $\mathcal{B}$ *com coeficientes complexos racionais* (complexos com partes real e imaginária racionais, que denotaremos $\mathbb{C}_{\mathbb{Q}}$). Esse é um conjunto enumerável: $\operatorname{span}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{B}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{span}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{B}_n)$, com $\mathcal{B}_n = \{e_1, ..., e_n\}$, e cada $\operatorname{span}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{B}_n)$ é enumerável, pois está em bijeção com $\mathbb{C}_{\mathbb{Q}}^n$ (e o produto cartesiano finito de conjuntos enumeráveis é enumerável). É também denso em $\mathcal{H}$, pois, dado $u \in \mathcal{H}$, sabemos que, para cada $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\|u - \sum_{k=1}^{n} \langle u, e_k\rangle\, e_k\|_{\mathcal{H}} < \frac{\varepsilon}{2}$, já que $\mathcal{B}$ é base; além disso, é possível encontrar complexos racionais $\alpha_1, ..., \alpha_n$ tais que $|\alpha_k - \langle u, e_k\rangle| < \frac{\varepsilon}{2n}$ para cada $k \in \{1, ..., n\}$, dada a densidade de $\mathbb{C}_{\mathbb{Q}}$ em $\mathbb{C}$, do que:

$$\left\| u - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\|_{\mathcal{H}} \leqslant \left\| u - \sum_{k=1}^{n} \langle u, e_k\rangle\, e_k \right\|_{\mathcal{H}} + \left\| \sum_{k=1}^{n} \langle u, e_k\rangle\, e_k - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\|_{\mathcal{H}} < \varepsilon;$$

como $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \in \operatorname{span}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{B})$, a proposição está provada. ■

Lema 2.3.40. Sejam $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ dois espaços de Hilbert separáveis. Então eles são isomorfos, $\mathcal{H}_1 \sim \mathcal{H}_2$.

Demonstração. Tomemos as bases $\mathcal{B}_1 = \{e_1, ..., e_n, ...\}$ de $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{B}_2 = \{f_1, ..., f_n, ...\}$ de $\mathcal{H}_2$. Definimos o isomorfismo $\Phi : H_1 \longrightarrow H_2$ por, dado $u \in \mathcal{H}_1$, $\Phi\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \langle u, e_n\rangle_{\mathcal{H}_1} e_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle u, e_n\rangle_{\mathcal{H}_1} f_n$. Linearidade e injetividade são óbvias; sobrejetividade vem do simples fato de, para todo $v \in \mathcal{H}_2$, encontrarmos $u = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle v, f_n\rangle_{\mathcal{H}_2} e_n$ tal que $\Phi(u) = v$. ■

Neste momento, já podemos comparar o que obtivemos com o objetivo que declaramos no início da Seção 2.2, notadamente, obter espaços de dimensão não finita que fossem, tanto quanto possível, parecidos com os euclidianos.

Ora, em dimensão finita n, todo espaço real ou complexo é isomorfo a $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ respectivamente, e como seus elementos são comumentemente descritos em coordenadas por n-uplas, um espaço de dimensão n pode ser compreendido, sem falta de rigor, como o espaço das listas de n números reais ou complexos. Pois, um espaço de Hilbert separável possui uma base enumerável, à qual podemos associar coordenadas, uma sequência de números. Em outras palavras, esses espaços são como os conjuntos das listas de uma quantidade enumerável de elementos, do que podemos pensar, por assim dizer, que são espaços de "dimensão enumerável", e, por assim dizer ainda mais, espaços de dimensão infinita, "mas não muito".

E como são todos eles isomorfos entre si, a analogia fica completa. De fato, a característica mais estranha dos espaços de Hilbert separáveis em comparação com os euclidianos (talvez a única importante que seja estranha) é a não compacidade de conjuntos fechados e limitados, como estudaremos melhor no Capítulo 3.

2.4 Formas sesquilineares e quadráticas

Nesta seção faremos um breve estudo das formas sesquilineares e quadráticas em espaços de Hilbert, as quais guardam uma estreita relação com os operadores lineares nesses espaços; com efeito, graças à presença dos produtos internos, veremos que há uma relação biunívoca entre operadores, formas sesquilineares e formas quadráticas.

Definição 2.4.1 (Forma Sesquilinear)**.** Sejam E e F espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Uma *forma sesquilinear* ω sobre $E \times F$ é uma função $\omega : E \times F \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que, para todo $u \in E$, $\omega(u, \cdot\,) : F \longrightarrow \mathbb{K}$ é antilinear e, dado $v \in F$, $\omega(\,\cdot\,, v) : E \longrightarrow \mathbb{K}$ é linear.

Definição 2.4.2 (Norma de Forma Sesquilinear)**.** Sejam E e F espaços vetoriais normados. A forma sesquilinear ω diz-se *limitada* se, pondo:

$$\|\omega\|_{\mathcal{B}(E\times F)} = \sup_{\substack{(u,v)\in E\times F \\ u,v\neq 0}} \frac{|\omega(u,v)|}{\|u\|_E \|v\|_F},$$

tivermos $\|\omega\|_{\mathcal{B}(E\times F)} < \infty$. Nesse caso, essa quanditade será a *norma* da forma sesquilinear.

Observação 2.4.3. Vê-se que $\|\omega\|_{\mathcal{B}(E\times F)} = \sup_{\substack{u,v\in E\times F \\ \|u\|,\|v\|=1}} |\omega(u,v)|$, assim como na Observação 2.1.14, *Observação* 2.4.4. Evidentemente, se ω_1 e ω_2 forem duas formas sesquilineares limitadas sobre $E \times F$, assim será $w_1 + \lambda\omega_2$, dado $\lambda \in \mathbb{K}$, com $\|\omega_1 + \lambda\omega_2\|_{\mathcal{B}(E\times F)} \leqslant \|\omega_1\|_{\mathcal{B}(E\times F)} + \lambda\|\omega_2\|_{\mathcal{B}(E\times F)}$. É fácil que as formas sesquilineares limitadas formam um espaço vetorial normado, e é imediato que $|\omega(u,v)| \leqslant \|\omega\|_{\mathcal{B}(E\times F)}\|u\|_E\|v\|_F$.

Definição 2.4.5 (Espaço das Formas Sesquilineares)**.** O espaço vetorial normado formado pelas formas sesquilineares limitadas sobre $E \times F$ será denotado $\mathcal{B}(E \times F)$.

Proposição 2.4.6. Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $\omega \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \times \mathcal{H})$. Então existe um único $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tal que $\omega(u,v) = \langle u, Av\rangle$ para quaisquer $u, v \in \mathcal{H}$. Além disso, $\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = \|\omega\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}\times\mathcal{H})}$.

Demonstração. Fixado $v \in \mathcal{H}$, a função $\mathcal{H} \ni u \longmapsto \omega(u,v) \in \mathbb{K}$ é um funcional linear limitado em $\mathcal{H}$, por isso há $\phi_v \in \mathcal{H}$ tal que $\omega(u,v) = \langle u, \phi_v\rangle$ para todo $u \in \mathcal{H}$. Ocorre que a aplicação $\mathcal{H} \ni v \longmapsto \phi_v \in \mathcal{H}$ é claramente linear (dadas as antilinearidades da forma ω e do produto interno na segunda variável) e também limitada:

$$\frac{\|\phi_v\|_{\mathcal{H}}^2}{\|v\|_{\mathcal{H}}^2} = \frac{\langle \phi_v, \phi_v\rangle}{\|v\|_{\mathcal{H}}^2} = \frac{\omega(\phi_v, v)}{\|v\|_{\mathcal{H}}^2} \leqslant \|\omega\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}\times\mathcal{H})}\frac{\|\phi_v\|_{\mathcal{H}}}{\|v\|_{\mathcal{H}}},$$

do que $\frac{\|\phi_v\|_{\mathcal{H}}}{\|v\|_{\mathcal{H}}} \leqslant \|\omega\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}\times\mathcal{H})}$. Isso significa que $\phi_v = Av$ para algum $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ e que $\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leqslant \|\omega\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}\times\mathcal{H})}$. Finalmente, $|\omega(u,v)| = |\langle u, Av\rangle| \leqslant \|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}\|u\|_{\mathcal{H}}\|v\|_{\mathcal{H}}$, do que $\|\omega\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}\times\mathcal{H})} \leqslant \|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$, e portanto $\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = \|\omega\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}\times\mathcal{H})}$.

Para a uicidade, basta mostrar que, se $\omega(u,v) = \langle u, Av\rangle$ e $\omega(u,v) = \langle u, Bv\rangle$, então $A = B$: naturalmente, $\langle u, Av\rangle - \langle u, Bv\rangle = 0$ implica $\langle u, (A-B)v\rangle = 0$. Tomando $u = (A-B)v$, ter-se-á $\|(A-B)v\|_{\mathcal{H}} = 0$ para todo $v \in \mathcal{H}$, portanto $A = B$. Agora basta por $\sim(\omega) = A$, em que esse perador e aquele para que $\omega(u,v) = \langle u, Av\rangle$, dados $u, v \in \mathcal{H}$. ■

Corolário 2.4.7. Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert. Estão os espaços vetoriais normados $\mathcal{B}(\mathcal{H} \times \mathcal{H})$ e $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ são isometricamente isomorfos, isto é, $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \sim \mathcal{L}(\mathcal{H})$, com $\sim$ preservando as normas dos respectivos espaços.

Demonstração. Óbvia. ■

Corolário 2.4.8 (Lax-Milgram)**.**

Demonstração. fica pro Thomas, acabamos de ter um seminário sobre isso. ■

Definição 2.4.9 (Forma Quadrática)**.** Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Uma função $\omega : E \longrightarrow \mathbb{K}$ é dita uma *forma quadrática* sobre E se existir $\tilde{\omega} \in \mathcal{B}(E \times E)$ tal que, $\forall u \in E$, seja $\omega(u) = \tilde{\omega}(u,u)$.

Definição 2.4.10 (Norma de Forma Quadrática)**.** Seja E um espaço vetorial normado. A forma quadrática ω diz-se *limitada* se, pondo:

$$\|\omega\|_{\mathcal{B}^2(E)} = \sup_{\substack{u\in E\\ u\neq 0}} \frac{|\omega(u)|}{\|u\|_E^2},$$

tivermos $\|\omega\|_{\mathcal{B}^2(E)} < \infty$. Nesse caso, essa quanditade será a *norma* da forma quadrática ω.

Observação 2.4.11. Valem as mesmas observações que acima: $\|\omega\|_{\mathcal{B}^2(E)} = \sup_{\substack{u\in E\\ \|u\|_E=1}} |\omega(u)|$ e, se ω_1 e ω_2 forem duas formas quadráticas limitadas sobre E, assim será $w_1 + \lambda\omega_2$, dado $\lambda \in \mathbb{K}$, com $\|\omega_1 + \lambda\omega_2\|_{\mathcal{B}^2(E)} \leqslant \|\omega_1\|_{\mathcal{B}^2(E)} + \lambda\|\omega_2\|_{\mathcal{B}^2(E)}$.

Definição 2.4.12 (Espaço das Formas Quadráticas)**.** O espaço vetorial normado formado pelas formas quadráticas limitadas sobre E será denotado $\mathcal{B}^2(E)$.

Corolário 2.4.13. Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{C}$, e $\omega \in \mathcal{B}^2(\mathcal{H})$. Então existe um único $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tal que $\omega(u) = \langle u, Au\rangle$ para qualquer $u \in \mathcal{H}$. Ademais, $\|\omega\|_{\mathcal{B}^2(\mathcal{H})} = \|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$.

Demonstração. A existência de um tal A é imediata, em vista da Proposição 2.4.6; igualmente o é a desigualdade $\|\omega\|_{\mathcal{B}^2(\mathcal{H})} \leqslant \|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$. Para provar que $\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leqslant \|\omega\|_{\mathcal{B}^2(\mathcal{H})}$, empregaremos a identidade:

$$\begin{aligned}\langle u, Av\rangle = \frac{1}{4}\big(&\langle u+v, A(u+v)\rangle - \langle u-v, A(u-iv)\rangle \\ &-i\,\langle u+v, A(u+iv)\rangle + i\,\langle u-iv, A(u-iv)\rangle\big)\,,\end{aligned} \tag{2.4.1}$$

válida somente caso $\mathcal{H}$ seja cnstruído sobre o corpo $\mathbb{C}$. Desse modo, vemos que:

$$\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = \sup_{\substack{u,v\in\mathcal{H}\\ \|u\|,\|v\|=1}} |\langle u, Av\rangle| \leqslant \sup_{\substack{u\in\mathcal{H}\\ \|u\|=1}} |\langle u, Au\rangle| = \sup_{\substack{u\in\mathcal{H}\\ \|u\|=1}} |\omega(u)| = \|\omega\|_{\mathcal{B}^2(\mathcal{H})}.$$

A unicidade vem de considerar que, se $A_1, A_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ são como no enunciado, então $\langle u, (A_1 - A_2)u\rangle = 0$ para todo $u \in \mathcal{H}$. Pela Equação (2.4.1) acima, isso também implica, no caso complexo, que $\langle u, (A_1 - A_2)v\rangle = 0$ para todos $u, v \in \mathcal{H}$; em particular, tomando $u = (A_1 - A_2)v$, obtém-se $A_1u = A_2u$ para todo u, ou seja, $A_1 = A_2$, concluindo a demonstração. ∎

Escólio 2.4.14. Se $\mathcal{H}$ for construído sobre o corpo $\mathbb{R}$, então vale o Corolário 2.4.13 quanto à existência do operador A, porém somente se poderá afirmar quanto às normas que $\|\omega\|_{\mathcal{B}^2(\mathcal{H})} = \inf_{\substack{A\in\mathcal{L}(\mathcal{H})\\ \omega(\,\cdot\,)=\langle\,\cdot\,,A\,\cdot\,\rangle}} \|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$.

Corolário 2.4.15. Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{C}$. Estão os espaços vetoriais normados $\mathcal{B}^2(\mathcal{H})$ e $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ são isometricamente isomorfos, isto é, $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \sim \mathcal{L}(\mathcal{H})$, com $\sim$ preservando as normas dos respectivos espaços.

Demonstração. Dado o Corolário 2.4.13, basta mostrar que, se $\omega(u) = \langle u, Au\rangle$ e $\omega(u) = \langle u, Bu\rangle$, então $A = B$, o que será feito a partir da identidade (2.4.1): se $\langle u, (A - B)u\rangle = 0$ para todo $u \in \mathcal{H}$, vê-se que, também, será $\langle u, (A - B)v\rangle = 0$ para todos $u, v \in \mathcal{H}$. Tomando $u = (A - B)v$, ter-se-á a demonstração. ∎

Corolário 2.4.16. Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{C}$, e $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ um operador linear tal que, para todo $u \in \mathcal{H}$, $\langle u, Au\rangle = 0$. Então $A = 0$.

Demonstração. Evidente dado o corolário anterior, só quisemos escrever explicitamente este resultado para contrastar com o caso real no exemplo abaixo. ∎

Exemplo 2.4.17. Tome $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathcal{H} = \mathbb{R}^2$, e escolha a matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, a qual certamente não é nula. Temos $\langle Au, u\rangle = {}^t uAu = 0$ para todo $u \in \mathbb{R}^2$.

Exemplo 2.4.18. A existência de isomorfismo entre $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ e $\mathcal{B}^2(\mathcal{H})$, em outras palavras, a unicidade do operador que representa a forma quadrática, é uma característica *exclusiva* dos espaços de Hilbert complexos. Tomemos como contra-exemplo para o caso real $\mathcal{H} = \mathbb{R}^2$ e a forma quadrática $\omega(x, y) = x^2 + y^2$. Qualquer matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{pmatrix}$, com $a \in \mathbb{R}$ arbitrário, satisfaz à identidade $\omega(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; porém, $\|\omega\|_{\mathcal{B}^2(\mathcal{H})} = 1$, enquanto que $\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = \sqrt{1 + a^2}$. Note-se, entretanto, que $\|\omega\|_{\mathcal{B}^2(\mathcal{H})} = \inf_{\substack{A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \\ \omega(\,\cdot\,) = \langle\,\cdot\,, A\,\cdot\,\rangle}} \|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}$, o que ilustra o resultado do Escólio 2.4.14.

A grande vantagem que tiraremos dos fatos apresentados nesta seção são as novas formas de calcular a norma de um operador através do produto interno em um espaço complexo, notadamente:

$$\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = \sup_{\substack{u, v \in \mathcal{H} \\ \|u\|, \|v\| = 1}} |\,\langle Au, v\rangle\,| = \sup_{\substack{u \in \mathcal{H} \\ \|u\| = 1}} |\,\langle Au, u\rangle\,|.$$

Não custa, todavia, dar um exemplo de aplicação da isomorfia entre $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ e os espaços de formas sesquilineares e quadráticas como forma de simplificar a obtenção de resultados concernentes aos operadores em si:

Exemplo 2.4.19. exercício do king's college que resolvi dessa forma