ÁLGEBRA LINEAR
SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Luís Felipe Kiesow de Macedo

Universidade Federal de Pelotas - UFPel

Sistemas de Equações Lineares

Sistemas e matrizes

Muitos problemas em várias áreas da Ciência recaem na solução de sistemas lineares. Vamos ver como a álgebra matricial pode simplicar o estudo dos sistemas lineares.

Equação Linear

Uma equação linear em n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é uma equação da forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

Sistema de Equações Lineares

Um sistema de m equações e n incógnitas é um conjunto de equações do tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

onde os números $a_1, \cdots, an$ e b são números reais ou complexos conhecidos.

- Uma solução do sistema é uma n-upla de números $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que satisfaça simultaneamente as m equações.
- O conjunto de todas as possíveis soluções é chamado conjunto solução do sistema linear.
- Dois sistemas lineares são chamados de equivalentes se possuírem o mesmo conjunto solução.

Sistemas e matrizes

Dado o sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

podemos escrever este sistema em uma forma matricial **A.X = B,**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Sistemas e matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{matriz dos coeficientes}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{matriz das incógnitas}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \text{matriz dos termos independentes.}$$

Sistemas e matrizes

Matriz Ampliada do Sistema

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Operações Elementares

Como transformar um sistema linear por outro equivalente? Através das seguintes Operações Elementares (na forma matricial aumentada):

- i Substituir uma linha pela soma de si mesmo com um múltiplo de outra linha;
- ii Trocar duas linhas;
- iii Multiplicar todas as entradas em uma linha por uma constante diferente de zero.

Teorema

Dois sistemas que possuem matrizes ampliadas equivalentes são equivalentes.

Forma Escalonada

Uma matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ está na forma escalonada reduzida quando satisfaz as seguintes condições:

i Todas as linhas nulas (formadas inteiramente por zeros) ocorrem abaixo das linhas não nulas;

ii O primeiro elemento não nulo de cada linha não nula, chamado pivô, é igual a 1;

iii O pivô da linha $i + 1$ ocorre à direita do pivô da linha i, para $i = 1, \ldots, m - 1$.

iv Se uma coluna contém um pivô, então todos os seus outros elementos são iguais a zero.

Posto e Nulidade de uma Matriz

Definição: Posto e Nulidade

Dada a matriz $A_{m \times n}$, seja $B_{m \times n}$ a matriz-linha reduzida à forma escada linha equivalente a A.

O **posto** de A, denotado por p, é o número de linhas não nulas de B.

A **nulidade** de A é o número $n - p$ (também chamada grau de liberdade do sistema).

Soluções de um Sistema de Equações Lineares

Seja o sistema de m equações lineares com n incógnitas $x_1, \ldots, x_n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

cujos coeficientes a_{ij} e termos constantes b_i são números reais (ou complexos).

Este sistema poderá ter

i uma única solução $\begin{cases} x_1 & = & k_1 \\ \vdots & & \vdots \\ x_n & = & k_n \end{cases}$

ii infinitas soluções

iii nenhuma solução.

Teorema

i Um sistema de m equações e n incógnitas admite solução se, e somente se o posto da matriz ampliada é igual ao posto da matriz dos coeficientes.

ii Se as duas matrizes têm o mesmo posto p e $p = n$, a solução será única.

iii Se as duas matrizes têm o mesmo posto e $p < n$, podemos escolher $n - p$ incógnitas, e as outras p incógnitas serão dadas em função destas.

notação

p_c = posto da matriz dos coeficientes
p_a = posto da matriz ampliada
Se $p_c = p_a$ simplesmente denotamos por p

Exercícios

Mais informações:

e-mail: `felipekiesow@gmail.com`

Adeus!