CAPÍTULO 3
DEPENDÊNCIA LINEAR

1 Combinação Linear

Definição: Seja $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\}$ um conjunto com n vetores. Dizemos que um vetor $\vec{u}$ é combinação linear desses n vetores, se existirem escalares $a_1, a_2, ..., a_n \in \Re$ tais que $\vec{u} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + ... + a_n\vec{v}_n$, ou seja, $\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} a_i\vec{v}_i$.

Exemplo (1): Considere os vetores $\vec{u} = (-4,10,5)$, $\vec{v}_1 = (1,1,-2)$, $\vec{v}_2 = (2,0,3)$ e $\vec{v}_3 = (-1,2,3)$.

a) Escrever, se possível, o vetor $\vec{u}$ como combinação linear dos vetores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$.

b) Escrever, se possível, o vetor $\vec{u}$ como combinação linear dos vetores $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$.

Solução:

a) Para que $\vec{u}$ seja combinação linear dos vetores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, devem existir escalares $\alpha, \beta, \gamma \in \Re$ tais que $\vec{u} = \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 + \gamma\vec{v}_3$. Então:

$(-4,10,5) = \alpha(1,1,-2) + \beta(2,0,3) + \gamma(-1,2,3) \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta - \gamma = -4 \\ \alpha + 2\gamma = 10 \\ -2\alpha + 3\beta + 3\gamma = 5 \end{cases}$. Resolvendo o sistema linear vamos obter: $\alpha = 2$, $\beta = -1$ e $\gamma = 4$. Portanto: $\vec{u} = 2\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + 4\vec{v}_3$.

b) Para que $\vec{u}$ seja combinação linear dos vetores $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$, devem existir escalares m e n $\in \Re$ tais que $\vec{u} = m\vec{v}_2 + n\vec{v}_3$. Então:

$(-4,10,5) = m(2,0,3) + n(-1,2,3) \Rightarrow \begin{cases} 2m - n = -4 \\ 2n = 10 \\ 3m + 3n = 5 \end{cases}$. Da segunda equação obtemos $n = 5$. Substituindo nas outras duas obtemos $m = \frac{1}{2}$ e $m = -\frac{10}{3}$. O que é uma contradição. Logo o sistema linear é impossível e não admite solução real. Portanto, não existem escalares m e n $\in \Re$ tais que $\vec{u} = m\vec{v}_2 + n\vec{v}_3$, ou seja, não é possível escrever o vetor $\vec{u}$ como combinação linear dos vetores $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$.

2 Vetores LI e LD

Definição: Dizemos que os vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ são ***linearmente independentes*** (vetores LI) se a expressão $a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + ... + a_n\vec{v}_n = \vec{0}$ se verifica somente se os escalares $a_1, a_2, ..., a_n \in \Re$ forem todos nulos, ou seja, $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$.

Definição: Dizemos que os vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ são ***linearmente dependentes*** (vetores LD) se a expressão $a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + ... + a_n\vec{v}_n = \vec{0}$ se verifica somente se os escalares $a_1, a_2, ..., a_n \in \Re$ forem não todos nulos, ou seja, pelo menos um dos escalares deve ser diferente de zero.

Exemplo (2): Verificar a dependência linear dos vetores abaixo:

a) $\vec{v}_1 = (1,1,-2)$, $\vec{v}_2 = (2,0,3)$ e $\vec{v}_3 = (-1,2,3)$

b) $\vec{v}_1 = (1,1,-2)$, $\vec{v}_2 = (2,0,3)$ e $\vec{v}_3 = (8,2,5)$

Solução:

a) Para verificar a dependência linear entre esses vetores, devemos escrever a expressão $a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 + c\vec{v}_3 = \vec{0}$ e determinar os escalares. Então:

$$a(1,1,-2) + b(2,0,3) + c(-1,2,3) = (0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} a + 2b - c = 0 \\ a + 2c = 0 \\ -2a + 3b + 3c = 0 \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema linear homogêneo vamos obter: $a = 0, b = 0$ e $c = 0$, ou seja, os escalares todos nulos. Portanto os vetores são LI.

b) Analogamente ao item (a), escrevemos a expressão $a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 + c\vec{v}_3 = \vec{0}$. Então:

$$a(1,1,-2) + b(2,0,3) + c(8,2,5) = (0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} a + 2b + 8c = 0 \\ a + 2c = 0 \\ -2a + 3b + 5c = 0 \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema linear homogêneo vamos obter a solução geral: $a = -2c$ e $b = -3c, \forall c \in \Re$. É evidente que para c=0 segue que a=0 e b=0, mas não é a única solução, ou seja, existem infinitas soluções onde os escalares não são todos nulos. Portanto os vetores são LD.

Teorema (1): Os vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ são Linearmente Dependentes (LD) se, e somente se um deles é combinação linear dos demais.

OBS: este é um teorema de condição necessária e suficiente; o termo *"se, e*

somente se" significa que o teorema tem duas implicações:
(1) *"se um conjunto de vetores é LD, então um deles é combinação linear dos demais vetores"*, e (2) *"se, em um conjunto de vetores, um deles é combinação linear dos demais, então esses vetores são LD"*.
Assim, a demonstração do teorema contém duas partes: uma para demonstrar a condição necessária (1) e a outra para demonstrar a condição suficiente (2).

Demonstração:

(1) Hipótese: os vetores $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ são LD

Tese: um deles é combinação linear dos demais vetores.

Se, por hipótese, os vetores $v_1, v_2, ..., v_n$ são LD, então, existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, não todos nulos, tais que: $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = 0$.
Supondo, por exemplo, que $\alpha_1 \neq 0$, pode-se escrever:

$$v_1 = \left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)v_2 + \left(-\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right)v_3 + ... + \left(-\frac{\alpha_n}{\alpha_1}\right)v_n;$$

chamando:

$$\beta_2 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1};\ \beta_3 = -\frac{\alpha_3}{\alpha_1};\ ...\ ;\ \beta_n = -\frac{\alpha_n}{\alpha_1},$$ vem:

$$v_1 = \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3 + \cdots + \beta_n v_n,$$

e, portanto, o vetor v_1 é combinação linear dos demais vetores.
Observe-se que, assim como se supôs que $\alpha_1 \neq 0$ e se mostrou que v_1 é combinação linear dos demais vetores, pode-se supor que qualquer um dos escalares α_i $(1 \leq i \leq n)$ é diferente de zero e concluir-se que v_i é combinação linear dos demais vetores.

(2) Hipótese: um dos vetores é combinação linear dos demais vetores.

Tese: os vetores $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ são LD

Por hipótese, um dos vetores é combinação linear dos demais; pode-se supor, por exemplo, que esse seja o vetor v_1. Isso significa que existem escalares $\beta_2, \beta_3, ..., \beta_n$ tais que:

$$v_1 = \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3 + \cdots + \beta_n v_n;$$

pode-se escrever, equivalentemente:

$$(-1)v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3 + \cdots + \beta_n v_n = 0.$$

Sendo o escalar que multiplica o vetor v_1 não nulo, já que é igual a -1, conclui-se que os vetores $v_1, v_2, ..., v_n$ são LD.

É claro que, fazendo-se a suposição de que qualquer vetor v_i $(1 \le i \le n)$ seja combinação linear dos outros vetores, concluir-se-á, de maneira análoga, que os vetores $v_1, v_2, ..., v_n$ são LD.

Exemplo (3): Como vimos no exemplo (2) os vetores $\vec{v}_1 = (1,1,-2)$, $\vec{v}_2 = (2,0,3)$ e $\vec{v}_3 = (8,2,5)$ são LD. Logo, pelo Teorema (1), um deles é combinação linear dos demais. De fato. Suponhamos que $\vec{v}_3 = m\vec{v}_1 + n\vec{v}_2$. Então:

$$(8,2,5) = m\,(1,1,-2) + n\,(2,03) \Rightarrow \begin{cases} 8 = m + 2n \\ 2 = m \\ 5 = -2m + 3n \end{cases}$$. Da segunda equação vem que $m = 2$.

Substituindo $m = 2$ nas outras duas equações vem que $n = 3$. Logo, existem os escalares $m = 2$ e $n = 3$ tais que $\vec{v}_3 = 2\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2$. Portanto, $\vec{v}_3$ é combinação linear dos vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.

Teorema (2): Considere $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$, vetores LD, então k desses vetores serão LD, para $k \ge n$.

Demonstração:

<u>Hipótese</u>: os vetores $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ são LD

<u>Tese</u>: os vetores $v_1, v_2, ..., v_k$ são LD, para todo $k \ge n$

Por hipótese, os vetores $v_1, v_2, ..., v_n$ são LD; então, existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, não todos nulos, tais que:

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = 0$.

A esse conjunto de n vetores, acrescentem-se mais $k - n$ $(k \ge n)$ vetores, isto é, considere-se, agora, o conjunto:

$\{v_1, v_2, ..., v_n, v_{n+1}, v_{n+2}, \cdots, v_k\}$.

Escrevendo-se a equação:

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n + \alpha_{n+1} v_{n+1} + \alpha_{n+2} v_{n+2} + \cdots + \alpha_k v_k = 0$,

conclui-se, a partir dela, que os vetores $v_1, v_2, ..., v_n, v_{n+1}, v_{n+2}, \cdots, v_k$ são LD, pois, mesmo que os escalares $\alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, ..., \alpha_k$ sejam todos nulos, entre os escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ há pelo menos um deles que não é nulo, já que os vetores $v_1, v_2, ..., v_n$ são LD. Logo, o conjunto de vetores $\{v_1, v_2, ..., v_n, v_{n+1}, v_{n+2}, \cdots, v_k\}$ é LD.

Observações:

1) Por esse teorema, conclui-se que, se um conjunto de vetores é LD, aumentando-se o número de vetores deste conjunto, o novo conjunto será LD.

2) Observe-se que o teorema é apenas de condição necessária, ou seja, a recíproca <u>não</u> é verdadeira. Isso significa que, se um conjunto de *n* vetores $v_1, v_2, ..., v_n$ é LD, isso <u>não</u> implica que o conjunto de vetores $v_1, v_2, ..., v_m$ é LD, para $m \leq n$. Assim, quando se sabe que um conjunto de vetores é LD, se forem retirados desse conjunto um ou mais vetores, não se pode afirmar que o novo conjunto é LD.

Teorema (3): Considere $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ vetores LI, então k desses vetores serão LI, para $k \leq n$.

Demonstração:

<u>Hipótese</u>: os vetores $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ são LI

<u>Tese</u>: os vetores $v_1, v_2, ..., v_k$ são LI, para todo $k \leq n$

Por hipótese, os vetores $v_1, v_2, ..., v_n$ são LI; então, a equação

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = 0$

é verdadeira somente se $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$.

Tomando-se um índice $k \leq n$, considere-se o conjunto

$\{v_1, v_2, ..., v_k\} \subset \{v_1, v_2, ..., v_n\}$.

Da equação:

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_k v_k = 0$,

segue-se que $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_k = 0$, pois os vetores $v_1, v_2, ..., v_n$ são LI e os vetores $v_1, v_2, ..., v_k$ estão entre eles. Portanto, conclui-se que os vetores $v_1, v_2, ..., v_k$ são LI, o que demonstra o teorema.

OBS:

1) Por esse teorema, conclui-se que, se um conjunto de vetores é LI, diminuindo-se o número de vetores deste conjunto, o novo conjunto também será LI.

2) O teorema é apenas de condição necessária, isto é, a recíproca <u>não</u> é verdadeira. Isso significa que, se um conjunto de *n* vetores $v_1, v_2, ..., v_n$ é LI, isso <u>não</u> implica que o conjunto de vetores $v_1, v_2, ..., v_m$ é LI, para $m \geq n$. Assim, quando se sabe que um conjunto de vetores é LI, se forem acrescentados a esse

conjunto um ou mais vetores, não se pode afirmar que o novo conjunto é LI.

Conseqüências:

(a) As afirmações abaixo são válidas para vetores no $\Re^2$.

1) O vetor nulo $\{\vec{0}\}$ é LD.

2) O $\{\vec{v}\}$, com $\vec{v} \neq \vec{0}$, é LI.

3) Dois vetores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$, com $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$ e $\vec{v}_2 \neq \vec{0}$, são LD se os vetores forem paralelos (são múltiplos escalares). Caso contrário são LI (não paralelos, não são múltiplos).

4) Três ou mais vetores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, ...\}$ são sempre LD.

(b) As afirmações abaixo são válidas para vetores no $\Re^3$.

1) O vetor nulo $\{\vec{0}\}$ é LD.

2) O $\{\vec{v}\}$, com $\vec{v} \neq \vec{0}$, é LI.

3) Dois vetores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$, com $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$ e $\vec{v}_2 \neq \vec{0}$, são LD se os vetores forem paralelos (são múltipos escalares). Caso contrário são LI (não paralelos, não são múltiplos).

4) Três vetores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ são sempre LD se forem coplanares. Caso contrário são LI (não coplanares).

5) Quatro ou mais vetores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, ...\}$ são sempre LD.

3 Base

Definição: Seja $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\}$ um conjunto de vetores de um espaço qualquer ($\Re^2$ ou $\Re^3$). Dizemos que B é uma base desse espaço se:

a) B é um conjunto LI.

b) B gera o espaço.

OBS: Dizer que um conjunto $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n\}$ gera o espaço significa que qualquer vetor $\vec{u}$, desse espaço, se escreve como combinação linear dos vetores de B, ou seja, existem escalares $a_1, a_2, ..., a_n \in \Re$ tais que $\vec{u} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + ... + a_n\vec{v}_n$.

Exemplo (4): Mostre que os conjuntos abaixo são bases dos respectivos espaços.

a) B = {(1,2), (-3,4)} é base do $\Re^2$.

b) B = {(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)} é base do $\Re^3$.

Solução:

a) Sejam $\vec{v}_1 = (1,2)$ e $\vec{v}_2 = (-3,4)$. Vamos mostrar que B é um conjunto LI. Como não existe uma proporcionalidade entre as coordenadas dos vetores eles não são múltiplos, logo não são paralelos. Portanto são LI. Seja $\vec{u} = (x, y)$ um vetor qualquer do $\Re^2$. Vamos mostrar que $\vec{u}$ se escreve como combinação linear dos vetores de B. Então $\vec{u} = (x, y) = a(1,2) + b(-3,4) \Rightarrow \begin{cases} x = a - 3b \\ y = 2a + 4b \end{cases}$. Resolvendo o sistema temos: $\begin{cases} a = \dfrac{4x + 3y}{10} \\ b = \dfrac{-2x + y}{10} \end{cases}, \forall x \text{ e } y \in \Re$. Isso mostra que o sistema é possível e determinado. Logo existem os escalares a e $b \in \Re$ tais que $\vec{u} = (x, y) = a(1,2) + b(-3,4)$, ou seja, o vetor $\vec{u} = (x, y)$ se escreve como combinação linear dos vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, mostrando que B gera o $\Re^2$. Portanto, B é base do $\Re^2$.

b) Utilizando a condição de coplanaridade entre três vetores temos: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, ou seja, os vetores não são coplanares. Portanto, são LI. Mostrando que B gera o $\Re^3$. Seja $\vec{v} = (x, y, z)$ um vetor qualquer do $\Re^3$. Então: $(x, y, z) = a(1,1,1) + b(1,1,0) + c(1,0,0) \Rightarrow \begin{cases} x = a + b + c \\ y = a + b \\ z = a \end{cases}$. Resolvendo temos a solução $\begin{cases} a = z \\ b = y - z \\ c = x - y \end{cases}, \forall x, y \text{ e } z \in \Re$. Logo, existem escalares a, b e $c \in \Re$ tais que $(x, y, z) = a(1,1,1) + b(1,1,0) + c(1,0,0)$, ou seja, o vetor $\vec{v} = (x, y, z)$ se escreve como combinação linear dos vetores de B, mostrando que B gera o $\Re^3$. Portanto, B é base do $\Re^3$.

Conseqüências

1) O $\Re^2$ e o $\Re^3$ possuem infinitas bases.
2) Qualquer base do $\Re^2$ tem a mesma quantidade de vetores.
3) Qualquer base do $\Re^3$ tem a mesma quantidade de vetores.
4) Das infinitas bases do $\Re^2$, uma é considerada a mais simples, chamada de **Base Canônica do $\Re^2$**. Ela é constituída pelos vetores $\{\vec{i}, \vec{j}\}$, onde $\vec{i} = (1,0)$ e $\vec{j} = (1,0)$.
5) Das infinitas bases do $\Re^3$, uma também é considerada a mais simples, chamada de **Base Canônica do $\Re^3$**. Ela é constituída pelos vetores $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, onde $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$ e $\vec{k} = (0,0,1)$.

2) No $\Re^2$, qualquer conjunto com dois vetores LI constitui uma base.

3) No $\Re^3$, qualquer conjunto com três vetores LI constitui uma base.

Exercícios Propostos

1) Verificar a dependência linear dos vetores:

a) $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, -3, 6\right)$ e $\vec{v} = \left(-\frac{1}{8}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{2}\right)$

b) $\vec{a} = (1,2,2), \vec{b} = (-4,6,0)$ e $\vec{c} = (3,-1,2)$

c) $\vec{a} = (1,2,-1), \vec{b} = (-2,3,-1)$ e $\vec{c} = (0,-1,2)$ Resp: a) LD b) LD c)LI

2) Escrever o vetor $\vec{w} = (-3,5,3)$ como combinação linear dos vetores $\vec{a} = (1,2,-1), \vec{b} = (-2,3,-1)$ e $\vec{c} = (0,-1,2)$ Resp: $\vec{w} = \vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c}$

3) Verificar quais dos conjuntos abaixo é uma base do $\Re^3$.

a) $\vec{a} = (1,0,2), \vec{b} = (-2,3,1)$ e $\vec{c} = (3,2,-2)$

b) $\vec{u} = (1,0,0), \vec{v} = (2,3,1)$ e $\vec{w} = (-1,-6,-2)$ Resp: a) é base b) não é base

4) Determine m para que os vetores $\vec{u} = (2, m, 2), \vec{v} = (3, m, 0)$ e $\vec{w} = (1,-3,4)$ formem uma base do $\Re^3$. Resp: $m \neq -3$

5) Determine os valores de m para que os vetores $\vec{u} = (2, m, 8)$, $\vec{v} = (m+4,-1,3)$ e $\vec{w} = (7,4m,31)$ sejam LD. Resp: m=-3 ou m=2

6) Prove: "$\{\vec{u}+\vec{v}, \vec{u}-\vec{v}\}$ são LI $\Leftrightarrow$ $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ são LI".

7) Dados dois vetores $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ LI, mostre que: "se $\vec{w}$ é combinação linear de $\{\vec{u}, \vec{v}\}$, então essa combinação linear é única".

COMENTÁRIOS IMPORTANTES

1) Cuidado com as definições de combinação linear e de vetores LI e LD. Elas são muito parecidas e pode causar confusão.

2) Na prática, discutir se um conjunto de vetores é LI ou LD, quando usamos a definição, sempre vamos resolver um sistema linear homogêneo. Como os sistemas homogêneos são sempre possíveis, esta discussão se resume em: se o sistema for SPD (admite somente a solução trivial, todos os escalares são nulos), então os vetores são LI; se o sistema for SPI (além da solução trivial admite outras infinitas), então os vetores são LD.

2) Como o próprio nome diz: vetores linearmente dependentes (LD) significa que existe uma dependência entre eles, ou seja, eles se relacionam de alguma forma. Esta dependência é uma combinação linear que, geometricamente, significa que ou dois vetores são paralelos ou três vetores são coplanares. Caso os vetores sejam

linearmente independentes (LI), isso quer dizer que não existe relação nenhuma entre eles, ou seja, não são paralelos, não são coplanares.