Inversão de Matrizes

Definição e Propriedades

Definição. Uma matriz quadrada A, $n \times n$, é **invertível** (ou **não-singular**) se existe uma matriz B, $n \times n$, tal que

$$AB = BA = I.$$

B é chamada a **inversa** de A.

Se A não possui inversa, dizemos que A é **singular** (esta terminologia se explica pelo fato que as matrizes que não possuem inversa serem uma minoria entre todas as matrizes, minoria em um sentido matematicamente preciso além do alcance deste curso), ou não-invertível.

Proposição. *Se uma matriz possui uma inversa, então esta inversa é única.*

Prova: Suponha que

$$AB_1 = B_1A = I.$$
$$AB_2 = B_2A = I.$$

Tomando a equação $B_1A = I$, por exemplo, e multiplicando ambos os lados desta equação à direita por B_2, obtemos

$$\begin{array}{ll} (B_1A)B_2 = IB_2 & \Rightarrow \\ B_1(AB_2) = B_2 & \Rightarrow \\ B_1I = B_2 & \Rightarrow \\ B_1 = B_2. & \end{array}$$

■

Propriedades.

1. *Se A é invertível, então A^{-1} também é e $(A^{-1})^{-1} = A$.*
2. *Se A, B são invertíveis, então AB também é e*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Para verificar isso, temos que mostrar que

$$(AB)B^{-1}A^{-1} = I,$$
$$B^{-1}A^{-1}(AB) = I.$$

Provaremos a primeira identidade, já que a demonstração da segunda é análoga. De fato,

$$(AB)B^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I.$$

3. *Se A é invertível, então A^t também é e $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.*

Com efeito,

$$A^t(A^{-1})^t = [(A^{-1})A]^t = I^t = I,$$

e analogamente se prova que $(A^{-1})^t A^t = I$.

4. *Se $AB = I$, então $BA = I$.*

A propriedade 4 nos diz que para verificar se uma matriz é invertível, basta verificar se ela possui uma inversa à direita ou uma inversa à esquerda. Uma demonstração deste resultado, usando matrizes elementares, é dada no livro-texto.

Exercício. Se A e B são matrizes $n \times n$ tais que o produto AB é invertível, então A e B também são necessariamente invertíveis?

Resposta: Sim, pois $A^{-1} = B(AB)^{-1}$ e $B^{-1} = (AB)^{-1}A$.

Cálculo da Matriz Inversa através do Método de Gauss-Jordan

Exemplo 1. Calcule a inversa, se existir, da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Obter a inversa A^{-1} de A significa encontrar uma matriz

$$B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

tal que $AB = I$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Achar A^{-1} é portanto equivalente a resolver dois sistemas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ao invés de resolver cada um destes sistemas separadamente, podemos resolver os dois sistemas simultaneamente através do método de Gauss-Jordan construindo uma única matriz aumentada:

$$\left[\begin{array}{cc|c|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

De fato,

$$2^{\text{a}} \text{ linha } - 3 \times 1^{\text{a}} \text{ linha} \to 2^{\text{a}} \text{ linha} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$-\tfrac{1}{2}2^{\text{a}} \text{ linha } \to 2^{\text{a}} \text{ linha} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

$$1^{\text{a}} \text{ linha } - 2 \times 2^{\text{a}} \text{ linha} \to 1^{\text{a}} \text{ linha} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Portanto,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Podemos verificar este resultado, para nos certificarmos que não cometemos erros de cálculo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

O método de Gauss-Jordan fornece não somente uma maneira de calcular a inversa de uma matriz quando ela existir, mas também uma maneira de determinar se uma matriz é invertível ou não, pois uma matriz será invertível se e somente se os sistemas correspondentes (n sistemas no caso de uma matriz $n \times n$) tiverem todos soluções. Observe que nesta situação, porque a inversa de uma matriz é única, ou todos os sistemas possuem uma única solução, ou pelo menos um dos sistemas não possui solução. Resumimos estes fatos no seguinte teorema:

Teorema. *Uma matriz A, $n \times n$, é invertível se e somente se a matriz aumentada $[A \,|\, I]$ puder ser transformada através de operações elementares em uma matriz aumentada da forma $[I \mid B]$. Se isso acontecer, então $B = A^{-1}$.*

Exemplo 2. Calcule a inversa, se existir, da matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Primeiro construímos a matriz aumentada:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Em seguida, usamos o método de Gauss-Jordan para chegar a uma matriz escalonada reduzida no lado direito:

$$\begin{array}{l} \\ 2^{\text{a}} \text{ linha } -4 \times 1^{\text{a}} \text{ linha} \to 2^{\text{a}} \text{ linha} \;\Rightarrow \\ 3^{\text{a}} \text{ linha } -7 \times 1^{\text{a}} \text{ linha} \to 3^{\text{a}} \text{ linha} \;\Rightarrow \end{array} \qquad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} \\ \\ 3^{\text{a}} \text{ linha } -2 \times 1^{\text{a}} \text{ linha} \to 3^{\text{a}} \text{ linha} \;\Rightarrow \end{array} \qquad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

Os três sistemas são impossíveis de serem resolvidos, logo concluímos que a matriz B não possui inversa.

Reciprocamente, matrizes inversas podem ser utilizadas para dar informações sobre sistemas lineares:

Teorema. *Seja A uma matriz $n \times n$.*

(a) O sistema $AX = B$ tem solução única se e somente se A é invertível. Neste caso, a solução é $X = A^{-1}B$.

(b) O sistema homogêneo $AX = 0$ tem solução não-trivial se e somente se A é singular.