Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática
Disciplina: Álgebra Linear I – 2020.2

Lista 7 – Autovalores e Autovetores, e Diagonalização de Operadores

1. Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $T(x, y) = (2y, x)$. Determine:

   (a) O polinômio característico de T.

   (b) Os autovalores de T.

   (c) Os autovetores associados a cada autovalor de T.

2. Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$T(x, y, z) = (x + y, x - y + 2z, 2x + y - z).$$

   Determine:

   (a) O polinômio característico de T.

   (b) Os autovalores de T.

   (c) Os autovetores associados a cada autovalor de T.

3. Considere o operador linear $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ definido por $T(x + yt + zt^2) = y + xt + zt^2$. Determine:

   (a) O polinômio característico de T.

   (b) Os autovalores de T.

   (c) Os autovetores associados a cada autovalor de T.

4. Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definido por

$$T(x, y, z, w) = (x, x + y, x + y + z, x + y + z + w).$$

   Determine:

   (a) O polinômio característico de T.

   (b) Os autovalores de T.

(c) Os autovetores associados a cada autovalor de T.

5. Considere o operador linear $T : \mathbf{M}(2,2) \to \mathbf{M}(2,2)$ definido por $T(A) = A^T$. Determine:

   (a) O polinômio característico de T.

   (b) Os autovalores de T.

   (c) Os autovetores associados a cada autovalor de T.

6. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por

$$T(x, y, z) = (x + 2y + 3z, y + 2z, z).$$

   (a) Considere os seguintes vetores $(0,0,0), (1,2,3), (-3,0,0), (1,1,0)$. Quais deles são autovetores de T?

   (b) Considere os seguintes escalares -1, 0, 1 e $\sqrt{2}$. Quais deles são autovalores de T?

7. Considere α a base canônica de $\mathbb{R}^3$ e $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear dado pela matriz

$$[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

   Encontre os autovalores e autovetores correspondentes de T.

8. Considere α a base canônica de $\mathbb{R}^4$ e $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ o operador linear dado pela matriz

$$[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 12 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Encontre os autovalores e autovetores correspondentes de T.

9. Considere $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear com autovetores $v_1 = (3,1)$ e $v_2 = (-2,1)$ associados aos autovalores $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 3$, respectivamente. Determine $T(x,y)$.

10. Considere $T : \mathbf{M}(2,2) \to \mathbf{M}(2,2)$ o operador linear com autovetores

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

   associados aos autovalores $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$ e $\lambda_4 = 0$, respectivamente. Determine

$$T\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\right).$$

11. Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por

$$T(x, y) = (2x + 2y, x + 3y).$$

   (a) Encontre todos os autovalores de T.
   (b) Encontre uma base de cada autoespaço associado a um autovalor de T.
   (c) Determine as multiplicidades algébrica e geométrica de cada autovalor de T.
   (d) Se possível, determine uma base β de $\mathbb{R}^2$ cujos elementos são autovetores de T.

12. Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$T(x, y, z) = (3x - y + z, 7x - 5y + z, 6x - 6y + 2z).$$

   (a) Encontre todos os autovalores de T.
   (b) Encontre uma base de cada autoespaço associado a um autovalor de T.
   (c) Determine as multiplicidades algébrica e geométrica de cada autovalor de T.
   (d) Se possível, determine uma base β de $\mathbb{R}^3$ cujos elementos são autovetores de T.

13. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear definido por $T(x, y) = (7x - 4y, -4x + y)$.

   (a) Determine uma base do $\mathbb{R}^2$ em relação à qual a matriz do operador T é diagonal.
   (b) Encontre a matriz de T nessa base.

14. Verifique se cada operador linear abaixo é diagonalizável:

   (a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (2y, x)$.
   (b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x, y, z) = (x + y, x - y + 2z, 2x + y - z)$.
   (c) $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ tal que $T(x + yt + zt^2) = y + xt + zt^2$.
   (d) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $T(x, y, z, w) = (x, x + y, x + y + z, x + y + z + w)$.
   (e) $T : \mathbf{M}(2, 2) \to \mathbf{M}(2, 2)$ tal que $T(A) = A^T$.

15. Considere α a base canônica de $\mathbb{R}^2$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear dado pela matriz

$$[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

   Encontre:

   (a) O polinômio característico de T e escreva todos os candidatos a polinômio minimal de T.
   (b) O polinômio minimal de T e verifique se T é diagonalizável.

16. Considere α a base canônica de $\mathbb{R}^3$ e $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear dado pela matriz

$$[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Encontre:

(a) O polinômio característico de T e escreva todos os candidatos a polinômio minimal de T.

(b) O polinômio minimal de T e verifique se T é diagonalizável.

17. Considere α a base canônica de $\mathbb{R}^4$ e $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ o operador linear dado pela matriz

$$[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Encontre:

(a) O polinômio característico de T e escreva todos os candidatos a polinômio minimal de T.

(b) O polinômio minimal de T e verifique se T é diagonalizável.

18. Considere α a base canônica de $\mathbb{R}^3$ e $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear dado pela matriz

$$[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 2 & k & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Determine o valor de k para que o operador T seja diagonalizável.

19. Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$T(x, y, z) = (4x - 2y + 2z, 6x - 3y + 4z, 3x - 2y + 3z).$$

(a) Encontre o polinômio minimal de T.

(b) T é diagonalizável? Justifique.

20. Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$T(x, y, z) = (3x - 2y + 2z, 4x - 4y + 6z, 2x - 3y + 5z).$$

(a) Encontre o polinômio minimal de T.

(b) T é diagonalizável? Justifique.