Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática
Disciplina: Álgebra Linear I – 2020.2

Lista 6 – Transformações Lineares (Parte 2)

1. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$T(x, y, z) = (2x + y - z, 3x - 2y + 4z).$$

Sejam $\alpha = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ e $\beta = \{(1, 3), (1, 4)\}$ bases ordenadas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Determine $[T]^\alpha_\beta$.

2. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por

$$T(x, y) = (2y, x - y, x).$$

Sejam $\alpha = \{(0, 2), (1, -1)\}$ e $\beta = \{(1, 0, -1), (0, 1, 2), (1, 2, 0)\}$ bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ respectivamente. Determine $[T]^\alpha_\beta$.

3. Seja $T : \mathbf{M}(2, 2) \to \mathbb{R}^2$, definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\right) = (x + w, y + z).$$

Sejam α e β as bases canônicas de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbf{M}(2, 2)$, respectivamente, e $\gamma = \{(1, -1), (1, 2)\}$. Encontre $[T]^\beta_\alpha$ e $[T]^\beta_\gamma$.

4. Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$T(x, y, z) = (x - y, 2y, y + z).$$

   (a) Mostre que T é um isomorfismo.

   (b) Encontre a matriz $[T^{-1}]^\alpha_\alpha$ onde α é a base canônica de $\mathbb{R}^3$.

   (c) Determine $T^{-1}(x, y, z)$.

5. Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$T(x, y, z) = (2x, 4x - y, 2x + 3y - z).$$

   (a) Mostre que T é um isomorfismo.

(b) Encontre a matriz $[T^{-1}]_{\alpha}^{\alpha}$ onde α é a base canônica de $\mathbb{R}^3$.

(c) Determine $T^{-1}(x, y, z)$.

6. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$T(x, y, z) = (x - y + z, 3x + y - 2z).$$

Considere as bases ordenadas $\alpha = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ e $\beta = \{(1, 2), (0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^2$. Determine:

(a) $[T]_{\beta}^{\alpha}$.

(b) $[T(3, 4, 2)]_{\beta}$.

(c) $\dim(\mathrm{Im}(T))$ e $\dim(\mathrm{Ker}(T))$.

7. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que

$$[T]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},$$

onde $\alpha = \{(2, -1), (0, 2)\}$ e $\beta = \{(1, 1, 0), (0, 0, -1), (1, 0, 1)\}$ são bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ respectivamente. Determine $T(x, y)$.

8. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbf{M}(2, 2)$ a transformação linear tal que

$$[T]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

onde α e β são as bases canônicas de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbf{M}(2, 2)$, respectivamente. Determine $T(x, y)$.

9. Sejam $\alpha = \{(1, -1), (0, 2)\}$ e $\beta = \{(1, 0, -1), (0, 1, 2), (1, 2, 0)\}$ bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente, e seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que

$$[T]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Encontre $T(x, y)$.

(b) Determine uma base γ de $\mathbb{R}^3$, tal que $[T]_{\gamma}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

10. Sejam $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ transformações lineares, dadas por

$$T(x, y, z) = (x + y + 2z, 2x + y) \quad \text{e} \quad S(x, y) = (-x + y, 2x - y, 0).$$

Determine $[T \circ S]_\alpha^\alpha$ onde α é a base canônica de $\mathbb{R}^2$.

11. Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ transformações lineares, dadas por

$$T(x, y) = (2x, x - y, y) \text{ e } S(x, y, z) = (y - z, z - x).$$

Determine:

(a) $[S \circ T]_\alpha^\alpha$ onde α é a base canônica de $\mathbb{R}^2$.

(b) $[T \circ S]_\beta^\beta$ onde β é a base canônica de $\mathbb{R}^3$.

12. Sejam R, S e T três transformações lineares de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$ tais que $R = S \circ T$. Se

$$[R]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad [S]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix},$$

onde α é a base canônica de $\mathbb{R}^3$, determine $[T]_\alpha^\alpha$.

13. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por

$$T(x, y, z) = (2x - y - z, 2y - x - z, 2z - x - y).$$

Sejam α a base canônica de $\mathbb{R}^3$ e $\beta = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$. Determine:

(a) $[T]_\alpha^\alpha$.

(b) $[T]_\beta^\beta$.

(c) Uma matriz P tal que $[T]_\beta^\beta = P \cdot [T]_\alpha^\alpha \cdot P^{-1}$.

14. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que

$$[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

onde α é a base canônica de $\mathbb{R}^3$.

(a) T é um isomorfismo? Justifique.

(b) Determine $\dim(\mathrm{Im}(T))$ e $\dim(\mathrm{Ker}(T))$.

(c) Seja $\beta = \{(1, 1, 1), (1, 2, 0), (0, -2, 1)\}$ uma base ordenada de $\mathbb{R}^3$. Calcule $[T]_\beta^\beta$.

15. Seja $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ a transformação linear definida por

$$T(x + yt + zt^2) = 2x + 2y + (x + y + 2z)t + (x + y + 2z)t^2.$$

Sejam $\alpha = \{1, t, t^2\}$ e $\beta = \{1 - t, -2 + t + t^2, 1 + t + t^2\}$ bases ordenadas de $\mathcal{P}_2$.

(a) Determine $[T]_\alpha^\alpha$ e $[T]_\beta^\beta$.

(b) T é um isomorfismo? Justifique.

(c) Calcule $\dim(\mathrm{Im}(T))$ e $\dim(\mathrm{Ker}(T))$.