Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática
Disciplina: Álgebra Linear I – 2020.2

Lista 5 – Transformações Lineares (Parte 1)

1. Determine quais das seguintes funções são transformações lineares:

   (a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x + y, x - y)$.

   (b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (2x^2 + xy, x)$.

   (c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y) = (2x, x - y, y)$.

2. Determine quais das seguintes funções são transformações lineares:

   (a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (x + z, 2x - y + z)$.

   (b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = (2x + y, x + 2y, x + 2y + z)$.

   (c) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z, t) = (2x + y - z + t, x + y - 3z)$.

3. Determine quais das seguintes funções são transformações lineares:

   (a) $T : \mathbf{M}(2,2) \to \mathbb{R}$ definida por $T\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\right) = \det \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$.

   (b) $T : \mathbf{M}(2,2) \to \mathbb{R}^2$ definida por $T\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\right) = (x + y, 0)$.

   (c) $T : \mathbf{M}(2,2) \to \mathbb{R}^2$ definida por $T\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\right) = (x + w, y + z)$.

4. Determine quais das seguintes funções são transformações lineares:

   (a) $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ definida por $T(x + yt + zt^2) = y - xt + (x + z)t^2$.

   (b) $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_3$ definida por $T(x + yt + zt^2) = xt + yt^2 + zt^3$.

   (c) $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ definida por $T(p(t)) = p''(t)t^2$.

5. Determine a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ que satisfaz:

$$T(1,0,0) = (2,0), \quad T(0,1,0) = (1,1) \quad \text{e} \quad T(0,0,1) = (0,-1).$$

   Além disso, encontre $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(v) = (3,2)$.

6. Determine a transformação linear $T : \mathbf{M}(2,2) \to \mathcal{P}_2$ que satisfaz:

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = -t+t^2, T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = -1+t, T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = 3t, T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 2.$$

Além disso, encontre $T\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\right)$.

7. Determine a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}_2$ que satisfaz:

$$T(0,1,2) = 6 - t + t^2, \quad T(1,1,0) = 2 - t \quad \text{e} \quad T(0,0,1) = t.$$

Além disso, encontre $T(1,2,3)$.

8. Determine a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ que satisfaz:

$$T(-1,1) = (1,2,0) \quad \text{e} \quad (0,2) \in \mathrm{Ker}(T).$$

9. Sejam $\alpha = \{(2,-1),(0,2)\}$ e $\beta = \{(1,1,0),(0,0,-1),(1,0,1)\}$ bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente. Determine a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ que satisfaz:

$$[T(2,-1)]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } [T(0,2)]_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

10. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x,y) = (2x - y, 0).$$

   (a) Determine uma base e a dimensão de $\mathrm{Ker}(T)$.
   (b) Determine uma base e a dimensão de $\mathrm{Im}(T)$.
   (c) T é um isomorfismo? Justifique.

11. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x,y,z) = (x + y, y + z).$$

   (a) Determine uma base e a dimensão de $\mathrm{Ker}(T)$.
   (b) Determine uma base e a dimensão de $\mathrm{Im}(T)$.
   (c) T é um isomorfismo? Justifique.

12. Considere a transformação linear $T : \mathbf{M}(2,2) \to \mathbf{M}(2,2)$ definida por $T(X) = AX + X$, onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Determine uma base e a dimensão de $\mathrm{Ker}(T)$.

(b) Determine uma base e a dimensão de $\mathrm{Im}(T)$.

(c) T é um isomorfismo? Justifique.

13. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que

$$T(1,-1) = (3,2,-2) \qquad \text{e} \qquad T(-1,2) = (1,-1,3).$$

Determine:

(a) $T(x,y)$.

(b) Uma base e a dimensão de $\mathrm{Ker}(T)$.

(c) Uma base e a dimensão de $\mathrm{Im}(T)$.

14. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x,y,z,t) = (x - y + z + t, x + 2z - t, x + y + 3z - 3t).$$

(a) Determine uma base e a dimensão de $\mathrm{Ker}(T)$.

(b) Determine uma base e a dimensão de $\mathrm{Im}(T)$.

(c) T é injetora? Justifique.

(d) T é sobrejetora? Justifique.

15. Sejam $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ transformações lineares definidas por

$$T(x,y,z) = (2x, y + z) \quad \text{e} \quad S(x,y,z) = (x - z, y).$$

Determine:

(a) $(T + S)(x,y,z)$.

(b) $(3T)(x,y,z)$.

(c) $(2T - 5S)(x,y,z)$.

16. Sejam $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ transformações lineares definidas por

$$T(x,y,z) = (2x, y + z) \quad \text{e} \quad S(x,y) = (y,x).$$

Determine $(S \circ T)(x,y,z)$.

17. Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ transformações lineares definidas por

$$T(x,y) = (y,x) \quad \text{e} \quad S(x,y) = (0,x).$$

Determine:

(a) $(T+S)(x,y)$.

(b) $(2T-3S)(x,y)$.

(c) $(T\circ S)(x,y)$.

(d) $(S\circ T)(x,y)$.

(e) $T^2(x,y)$.

(f) $S^3(x,y)$.

18. Sejam $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$T(x,y)=(x+2y,3x+4y),$$

e $p(t)=-3+2t+t^2$ e $q(t)=-2-5t+t^2$ polinômios em $\mathcal{P}_2$. Determine:

(a) $p(T)(x,y)$.

(b) $q(T)(x,y)$.

19. Sejam $T:\mathbb{R}^3\to\mathcal{P}_2$ a transformação linear definida por

$$T(x,y,z)=(2y-z)+(x+4y-2z)t+(-x-7y+3z)t^2,$$

e $S:\mathcal{P}_2\to\mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por

$$S(x+yt+zt^2)=(x+y-z,y-z,x+z).$$

Determine $(S\circ T)(x,y,z)$ e $(T\circ S)(x+yt+zt^2)$.

20. Considere a transformação linear $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x,y,z)=(x+2y+3z,y+2z,z).$$

Verifique se T é um isomorfismo. Em caso afirmativo, determine $T^{-1}(x,y,z)$.

21. Considere a transformação linear $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x,y,z)=(x+y+z,-x+2z,x-z).$$

Verifique se T é um isomorfismo. Em caso afirmativo, determine $T^{-1}(x,y,z)$.

22. Considere a transformação linear $T:\mathbb{R}^3\to\mathcal{P}_2$ definida por

$$T(x,y,z)=(x+y+z)+(2z-x)t+(x-z)t^2.$$

Verifique se T é um isomorfismo. Em caso afirmativo, determine $T^{-1}(x+yt+zt^2)$.

23. Considere a transformação linear $T : \mathcal{S}_2 \to \mathcal{P}_2$ definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix}\right) = x + (x+y)t + (x+y+z)t^2.$$

Verifique se T é um isomorfismo. Em caso afirmativo, determine $T^{-1}(x + yt + zt^2)$.

24. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por

$$T(x, y, z) = (x + z, x - y, y).$$

Mostre que T é um isomorfismo, e determine:

(a) $T^{-1}(x, y, z)$.

(b) $T^2(x, y, z)$.

(c) $T^{-2}(x, y, z)$.

25. Sejam $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por

$$T(x, y, z) = (2x + 3y + 6z, 3x + 4y + 7z, 2x + 3y + 5z),$$

e $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por

$$S(x, y, z) = (x + y + z, y + 2z, x + y + 2z).$$

Determine $(S^{-1} \circ T)(x, y, z)$.