Lista 4 – Espaço Vetorial

1. Quais dos conjuntos abaixo são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$? Justifique.

   (a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 3z = 0\}$.

   (b) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{Z}\}$.

   (c) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0\}$.

2. Quais dos conjuntos abaixo são subespaços vetoriais de $\mathbf{M}(2, 2)$? Justifique.

   (a) $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbf{M}(2, 2) \mid a = c \text{ e } b + d = 0 \right\}$.

   (b) $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbf{M}(2, 2) \mid a + d \leq b + c \right\}$.

   (c) $W = \{A \in \mathbf{M}(2, 2) \mid A = A^T\}$.

3. Quais dos conjuntos abaixo são subespaços vetoriais de $\mathcal{P}_2$? Justifique.

   (a) $W = \{p(t) \in \mathcal{P}_2 \mid p(0) = 0\}$.

   (b) $W = \{p(t) \in \mathcal{P}_2 \mid p(0) = 2p(1)\}$.

   (c) $W = \{p(t) \in \mathcal{P}_2 \mid p(t) + p'(t) = 0\}$.

4. Quais dos conjuntos abaixo são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^4$? Justifique.

   (a) $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = 0 \text{ e } z - t = 0\}$.

   (b) $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + y - t = 0 \text{ e } z = 0\}$.

   (c) $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y - z + t = 0\}$.

5. Expresse o vetor $(1, -3, 10) \in \mathbb{R}^3$ como combinação linear dos vetores $u = (1, 0, 0)$, $v = (1, 1, 0)$ e $w = (2, -3, 5)$.

6. Consideremos $v_1 = (1, -3, 2)$ e $v_2 = (2, 4, -1)$ vetores de $\mathbb{R}^3$.

   (a) Escreva $u = (-4, -18, 7)$ como combinação linear dos vetores v_1 e v_2.

   (b) Mostre que $v = (4, 3, -6)$ não é combinação linear dos vetores v_1 e v_2.

(c) Determine uma condição para x, y e z de modo que (x, y, z) seja combinação linear dos vetores v_1 e v_2.

7. Quais dos seguintes vetores são combinações lineares de $u = (0, -2, 2)$ e $v = (1, 3, -1)$?

   (a) $(2, 2, 2)$ (b) $(3, 1, 5)$ (c) $(0, 4, 5)$ (d) $(0, 0, 0)$

8. Seja S o subespaço vetorial de $\mathcal{P}_2$ gerado pelos vetores $t, 1 - t$ e $4 + t^2$. O vetor $p(t) = 3 + 4t + 10t^2$ pertence a S? Justifique.

9. Seja $\mathcal{P}_2$ o espaço vetorial de todos os polinômios de grau menor ou igual a 2 com coeficientes reais.

   (a) Mostre que $\mathcal{P}_2 = [1 + t, 1 - t, t^2]$.

   (b) Escreva $p(t) = 2 - t + 3t^2$ como combinação linear dos vetores $1 + t, 1 - t, t^2$.

10. Quais dos conjuntos abaixo são linearmente indepentes (LI)? Justifique.

   (a) $\{(1, 2), (2, -1)\}$ em $\mathbb{R}^2$.

   (b) $\{(1, 1, 0), (1, -1, 1)\}$ em $\mathbb{R}^3$.

   (c) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \right\}$ em $\mathbf{M}(2, 2)$.

   (d) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \right\}$ em $\mathbf{M}(2, 2)$.

   (e) $\{t + 1, t - 1\}$ em $\mathcal{P}_1$.

   (f) $\{t + 1, 1 + t^2, 1 - t + t^2\}$ em $\mathcal{P}_2$.

11. Quais dos conjuntos abaixo são uma base? Justifique.

   (a) $\{(1, 0, 2), (1, 1, 2), (1, 1, 4)\}$ em $\mathbb{R}^3$.

   (b) $\{(2, 1, -1), (1, 0, -1), (1, 1, 0)\}$ em $\mathbb{R}^3$.

   (c) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ em $\mathbf{M}(2, 2)$.

   (d) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ em $\mathbf{M}(2, 2)$.

   (e) $\{t, 1 + t, t - t^2\}$ em $\mathcal{P}_2$.

   (f) $\{1, 2 - t, 3 - t^2, t + 2t^2\}$ em $\mathcal{P}_2$.

12. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F), e justifique sua resposta.

   (a) $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbf{M}(2, 2) \mid a, b, c \text{ e } d \in \mathbb{R} \text{ com } b = c + 1 \right\}$ é um subespaço vetorial do espaço $\mathbf{M}(2, 2)$ das matrizes reais dois por dois.

(b) $\mathbb{R}^2 = [(1,1),(1,-1),(0,1)]$.

(c) $(1,0,0) \in [(1,1,1),(-1,1,0),(1,0,-1)]$.

(d) O conjunto $\{(1,-1,2),(-1,1,1),(0,0,1)\}$ forma uma base para $\mathbb{R}^3$.

13. Determine o(s) valor(es) de $k \in \mathbb{R}$ de modo que:

    (a) O vetor $u = (-1,k,-7)$ seja combinação linear dos vetores $v_1 = (1,-3,2)$ e $v_2 = (2,4,-1)$.

    (b) O conjunto $\{(1,0,k),(1,1,k),(1,1,k^2)\}$ seja uma base de $\mathbb{R}^3$.

    (c) O conjunto $\{(1,0,-1),(1,1,0),(k,1,-1)\}$ seja LI em $\mathbb{R}^3$.

14. Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F), e justifique sua resposta.

    (a) O vetor $v = (1,-1,2)$ pertence ao subespaço gerado por $u = (1,2,3)$ e $v = (3,2,1)$.

    (b) Qualquer vetor em $\mathbb{R}^3$ pode ser expresso como combinação linear dos vetores $u = (-5,3,2)$ e $v = (3,-1,3)$.

15. Sejam $W_1 = [(1,0,0)]$ e $W_2 = [(1,1,0),(0,1,1)]$ subespaços de $\mathbb{R}^3$. Mostre que $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$.

16. Encontre uma base e a dimensão do subespaço W de $\mathbb{R}^3$ nos casos seguintes:

    (a) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$.

    (b) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=y=z\}$.

17. Encontre geradores para os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^3$:

    (a) $W_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y=0\}$.

    (b) $W_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+z = x-2y = 0\}$.

    (c) $W_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+2y-3z=0\}$.

    (d) $W_1 \cap W_2$.

    (e) $W_2 + W_3$.

18. Sejam $W_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-z=0\}$ e $W_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=y\}$ subespaços de $\mathbb{R}^3$.

    (a) Encontre uma base e a dimensão de $W_1 \cap W_2$.

    (b) Encontre uma base e a dimensão de $W_1 + W_2$.

    (c) $\mathbb{R}^3 = W_1 + W_2$? Justifique.

    (d) $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$? Justifique.

19. Sejam $W_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y=0; z=t\}$ e $W_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-y-z+t=0\}$ subespaços de $\mathbb{R}^4$.

   (a) Encontre uma base e a dimensão de $W_1 \cap W_2$.

   (b) Encontre uma base e a dimensão de $W_1 + W_2$.

   (c) $\mathbb{R}^4 = W_1 + W_2$? Justifique.

   (d) $\mathbb{R}^4 = W_1 \oplus W_2$? Justifique.

20. Em $\mathbb{R}^2$, considere o conjunto $\beta = \{(2,1),(1,-1)\}$. Mostre que β é uma base de $\mathbb{R}^2$ e calcule $[(4,-1)]_\beta$.

21. Sejam $v_1 = (1,2,3)$, $v_2 = (0,1,2)$ e $v_3 = (0,0,1)$ vetores de $\mathbb{R}^3$.

   (a) Mostre que o conjunto $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Determine as coordenadas de $u = (5,4,2)$ em relação à base β.

   (c) Determine o vetor $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $[v]_\beta = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$.

22. Sejam α e β bases ordenadas de $\mathbb{R}^3$ tais que $[I]^\alpha_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Se $v \in \mathbb{R}^3$ e $[v]_\beta = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$, encontre $[v]_\alpha$.

23. A matriz de mudança de base de uma base α de $\mathbb{R}^2$ para a base $\beta = \{(1,1),(0,2)\}$ é $[I]^\alpha_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. Determine a base α.

24. Sejam $\alpha = \{(1,0),(0,1)\}$, $\beta = \{(-1,1),(1,1)\}$ e $\gamma = \{(2,0),(0,2)\}$ bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$. Se $[v]_\beta = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$, determine $[v]_\alpha$ e $[v]_\gamma$.

25. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, e $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ uma base ordenada de $\mathbf{M}(2,2)$. A soma dos quadrados das entradas de $[A]_\beta$ é:

   (a) 10.

   (b) 19.

   (c) 21.

   (d) 30.

   (e) 36.

26. Sejam $\alpha = \{(1,0),(0,1)\}, \beta = \{(-1,1),(1,1)\}$ e $\gamma = \{(3,-1),(1,3)\}$ bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$.

    (a) Ache as seguintes matrizes de mudança de base: $[I]_\alpha^\beta$, $[I]_\beta^\alpha$, e $[I]_\gamma^\beta$.

    (b) Seja $u = (2,3)$. Determine: $[u]_\alpha$, $[u]_\beta$ e $[u]_\gamma$.

    (c) Seja $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $[v]_\beta = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$. Determine: $[v]_\alpha$ e $[v]_\gamma$.

27. Sejam $\alpha = \{(1,0),(0,2)\}, \beta = \{(-1,0),(1,1)\}, \gamma = \{(1,1),(-1,0)\}$ bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$. Determine:

    (a) $[I]_\alpha^\beta$ (b) $[I]_\beta^\gamma$ (c) $[I]_\gamma^\beta$ (d) $[I]_\alpha^\gamma$

28. Sejam α e β bases ordenadas de $\mathbb{R}^3$ tais que $[I]_\alpha^\beta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

    (a) Seja $u \in \mathbb{R}^3$ tal que $[u]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Determine $[u]_\alpha$.

    (b) Seja $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $[v]_\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Determine $[v]_\beta$.

29. Sejam $\alpha = \{1, t, t^2\}$ e $\beta = \{1, 2t+1, t^2\}$ bases ordenadas de $\mathcal{P}_2$.

    (a) Determine $[I]_\beta^\alpha$.

    (b) Se $p(t) = 3 + 2t$, encontre $[p(t)]_\beta$.

30. Seja $V = \mathcal{S}_2$ o espaço vetorial das matrizes simétricas de ordem 2 com entradas reais. Sejam

$$\alpha = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{e} \quad \beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

    duas bases ordenadas de V.

    (a) Determine $[I]_\alpha^\beta$.

    (b) Determine $[I]_\beta^\alpha$.

    (c) Encontre v tal que $[I]_\alpha^\beta \cdot [v]_\beta = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.