MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE EXPRESSÃO GRÁFICA
DISCIPLINA: TÓPICOS EM MATEMÁTICA APLICADOS À EXPRESSÃO GRÁFICA II
PROFESSORA: BÁRBARA DE CÁSSIA XAVIER CASSINS AGUIAR

CURVAS PLANAS

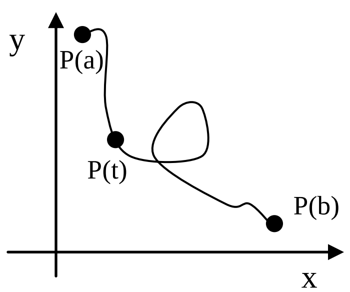
O conceito de curva é mais geral do que o de gráfico de uma função, pois, uma curva pode interceptar a si própria à maneira de um oito, ser fechada (como é o caso de círculos e elipses) ou desenvolver-se em espiral em torno de um ponto. Existem curvas com uma propriedade especial: as coordenadas x e y de um ponto P arbitrário dela podem ser expressas como funções de uma variável t, chamada parâmetro.

Por quê esse parâmetro é representado pela letra t?
A razão é que, em muitas aplicações, esta variável denota o tempo e P representa um objeto em movimento. Dizemos, às vezes que o ponto P(t) traça a curva C quando t varia em I.

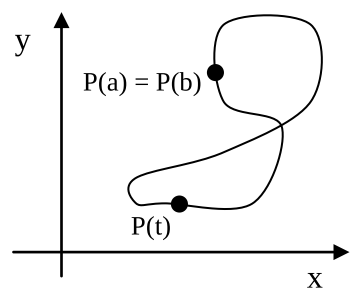
A orientação de uma curva parametrizada é a direção definida pelos valores crescentes de t.

Definição: Uma curva plana é um conjunto C de pares ordenados (f(t), g(t)), em que f e g são funções contínuas em um intervalo I.

Visualize no quadro uma curva, uma curva fechada



Curva



Curva Fechada

Definição: As equações x = f(t), y = g(t) para t em I, são as equações paramétricas de C, com parâmetro t.

Em geral, é possível obter uma descrição mais clara do gráfico de uma curva eliminando o parâmetro.

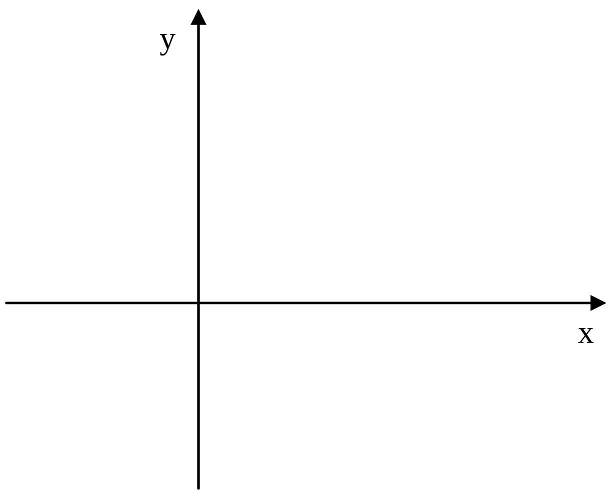
Exemplo 1: Trace o gráfico da curva C de equações paramétricas

$$x = 2t, \qquad y = t^2 - 1; \qquad -1 \le t \le 2$$

Solução:

Tabela de coordenadas

x							
y							



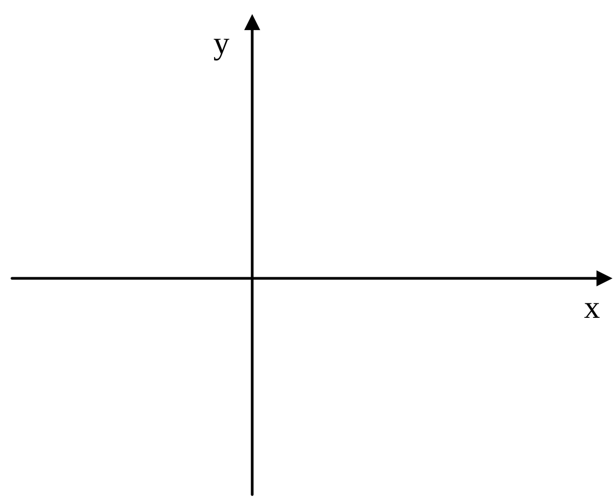
Obs.: A orientação de uma curva parametrizada é a direção definida pelos valores crescentes de t.

Exemplo 2: Um ponto se move em um plano de tal forma que sua posição P(x, y) no instante t é dada por

$$x = a\cos t, \qquad y = a\,\mathrm{sen}\, t; \qquad t \;\; em \;\; \Re$$

onde $a > 0$. Descreva o movimento do ponto.

Solução:



Exemplo 3: Trace o gráfico da curva C de equações paramétricas

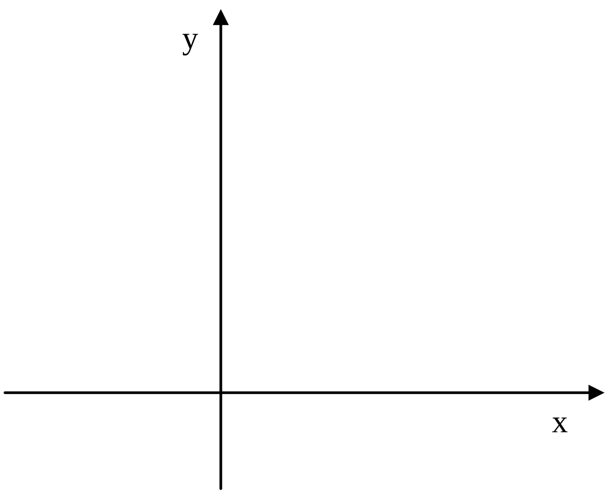
$$x = -2 + t^2, \quad y = 1 + 2t^2; \qquad t \ em \ \Re$$

e indique a orientação.

Solução:

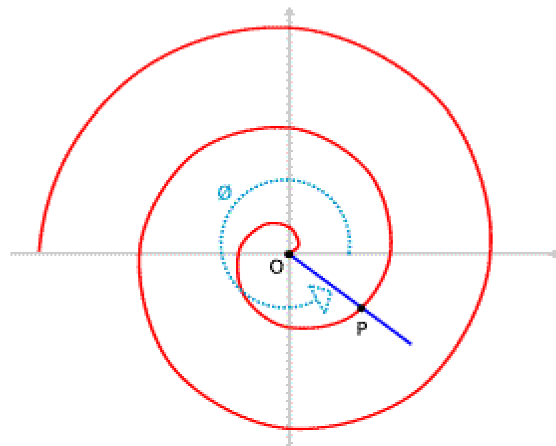
Tabela de coordenadas

x							
y							

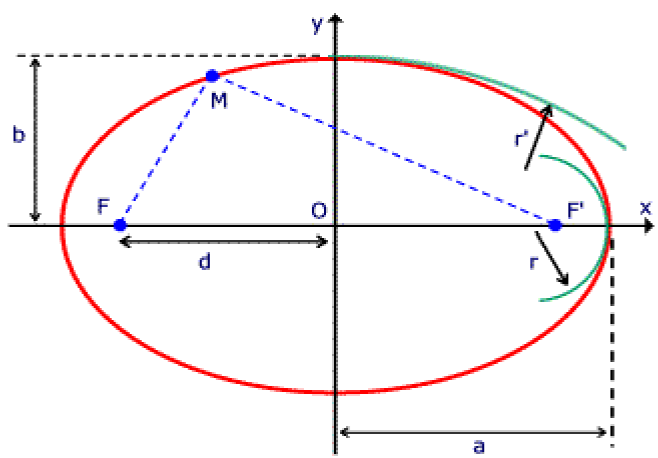


Mais alguns exemplos de curvas planas:

Espiral de Arquimedes



Elipse



Endereços eletrônicos interessantes:

http://www.mat.ufrgs.br/~calculo/curves/limacon.html

http://xtsunxet.usc.es/cordero/curvasplanas/curvasplanas.htm

Continuação: CURVAS PLANAS

Tangentes e Comprimentos de Arco

- **Tangentes**

Uma curva C é dada parametricamente por

$$x = 2t, \quad y = t^2 - 1; \quad -1 \le t \le 2$$

O **coeficiente angular da tangente** de um ponto genérico $P(x, y)$ de C pode ser obtido através da **derivada de uma função** $y = k(x)$**,** onde k é uma função definida em um certo intervalo conveniente, já encontrado anteriormente.

No entanto, podemos encontrar diretamente o coeficiente angular a partir das equações paramétricas sem eliminar o parâmetro t utilizando o teorema:

Teorema: Se uma curva suave C é dada parametricamente por $x = f(t),\ y = g(t)$, então o coeficiente angular dy/dx da tangente a C em $P(x,y)$ é:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} \quad \text{desde que} \quad dx/dt \neq 0$$

Exemplo 1: Utilizando o mesmo exemplo anterior temos que

$$x = 2t, \qquad y = t^2 - 1; \qquad -1 \leq t \leq 2$$

e aplicando o teorema acima temos

Observação: O coeficiente angular da normal é o inverso negativo $-\frac{1}{t}$ com $t \neq 0$

Exemplo 2: Seja a curva C com parametrização

$$x = t^3 - 3t, \qquad y = t^2 - 5t - 1; \qquad t\ em\ \Re$$

a- Ache a **equação da tangente** a C no **ponto correspondente** a $t = 2$.
b- Para que valores de t a tangente t é horizontal ? vertical?

Solução:

a-

b-

- **Comprimentos de Curvas**

O comprimento L de curvas C podem ser descritos pelo teorema

Teorema: Se uma curva suave C é dada parametricamente por $x = f(x),\ y = g(x)$, com $a \le t \le b$, e se C não intercepta a si própria, exceto possivelmente em $t = a$ e $t = b$, então o comprimento L de C é

$$L = \int_a^b \sqrt{[f`(t)]^2 + [g`(t)]^2\, dt} \quad = \quad \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2}\, dt$$

Exemplo 3: Ache o comprimento L de um arco C de uma circunferência de raio r

$$x = r\cos t, \qquad y = r\,\text{sen}\,t; \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Solução:

Exemplo 4: Um planador está voando para cima ao longo da hélice $r(t) = (\cos t)i + (\text{sen}\,t)j + tk$. Qual é a distância atingida pelo planador ao longo de sua trajetória de $t = 0$ até $t = 2\pi$.

Solução:

O segmento da trajetória durante esse tempo corresponde a uma volta completa da hélice. O comprimento dessa parte da curva é

COORDENADAS POLARES

Já conhecemos o sistema de coordenadas cartesianas, noção introduzida por René Descartes filósofo e matemático francês, 1596 – 1650, criador dos fundamentos da Geometria Analítica. Existe um sistema, chamado **Sistema de Coordenadas Polare**s, que é vinculado às coordenadas cartesianas, através de relações trigonométricas convenientes.

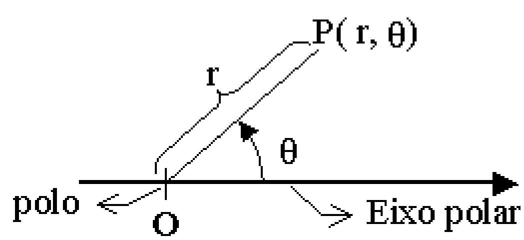
O sistema de coordenadas polares é um outro recurso que podemos utilizar para localizar pontos no plano e conseqüentemente, representar lugares geométricos através de equações, o que é de grande utilidade em várias áreas da Matemática, como por exemplo, no cálculo de áreas limitadas por duas ou mais curvas planas, áreas de superfícies, etc.

O Sistema Polar

Este sistema é geralmente utilizado quando a equação cartesiana de um lugar geométrico apresenta dificuldade operacional na sua utilização, devido por exemplo ao grau elevado de suas variáveis. Na maioria das vezes a equação deste lugar geométrico em coordenadas polares é simples e de fácil manipulação.

- O sistema polar é constituído de um eixo e um ponto fixo sobre este. O eixo é chamado de **eixo polar** e o ponto fixo de **polo.**

- A todo ponto P do plano associamos um par de elementos: o primeiro é à distância do ponto P ao **polo** e o segundo é o ângulo formado pelo eixo polar e a semi-reta de origem **O** e que passa por P.

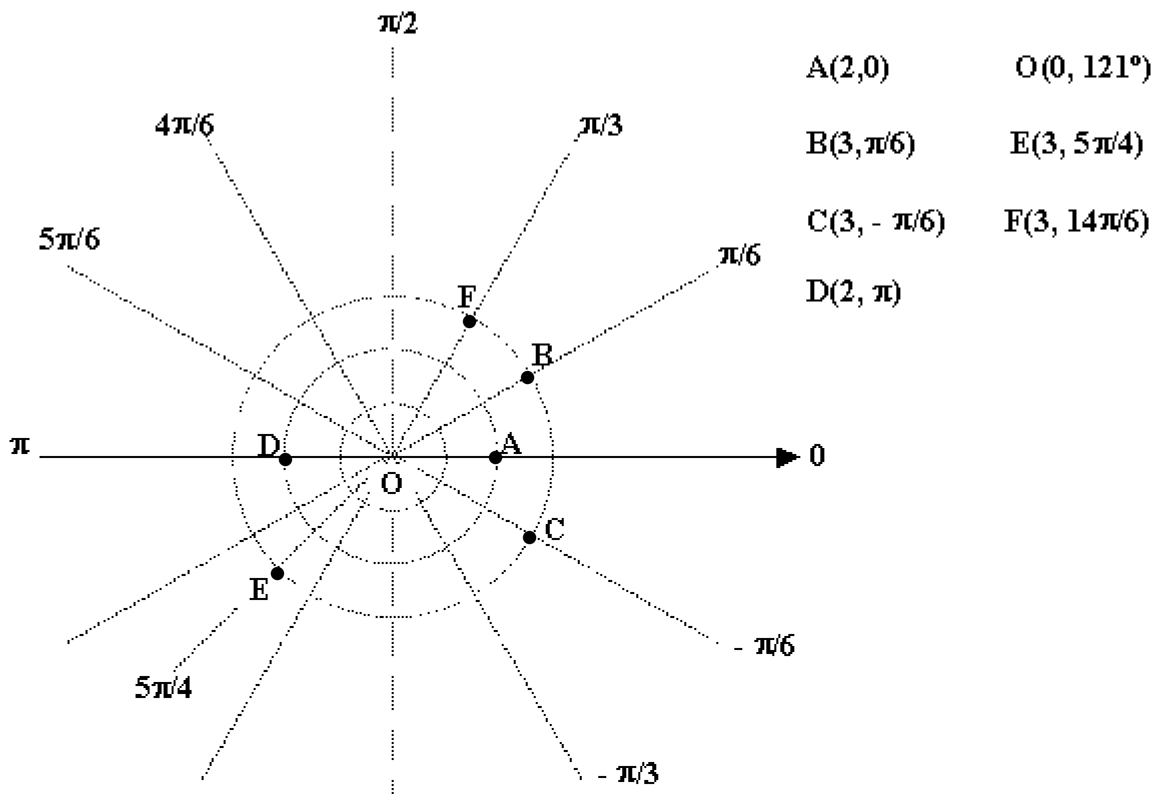


Para localizar um ponto P em coordenadas polares (r, θ), localizamos o lado final do ângulo θ, onde θ é medido como na trigonometria (positivo no sentido anti-horário) e caso contrário, o ângulo é negativo. Neste segmento do lado final do ângulo marcamos um segmento de comprimento r. Se $0 \leq r$, então P está no lado final do ângulo e se $r < 0$ então o ponto está no raio oposto.

Exemplo 1: Marque o ponto P = $(3, -\frac{7\pi}{4})$ de coordenadas polares:

Mais exemplos:

Plano polar



Algumas curvas têm equações em coordenadas polares que são mais simples do que em coordenadas retangulares. Isto já justifica o uso das coordenadas polares. O gráfico que uma equação em coordenadas polares, é o conjunto dos pontos P tais que P tem algum par de coordenadas (r, θ) que satisfaz a equação dada. O gráfico de uma equação $r = f(\theta)$ pode ser construído calculando uma tabela com vários valores de (r, θ) e então marcando os pontos (r, θ) no plano polar.

Representando Graficamente Equações e Desigualdades

Exercício1: Represente graficamente o conjunto de pontos cujas coordenadas polares satisfazem as condições dadas:

$$1 \leq r \leq 2 \quad \text{e} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Solução:

Exercício 2: Trace o gráfico da equação polar $r = 4\,\text{sen}\,\theta$.

Solução:

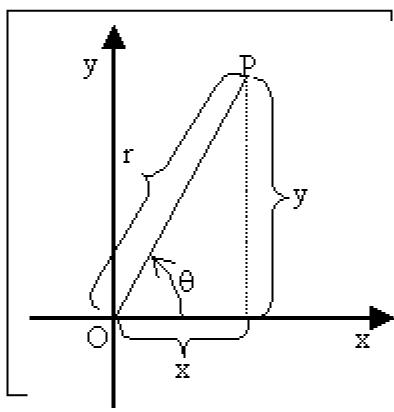
θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
r									

Relações entre Coordenadas Polares e Retangulares

Uma das maneiras de relacionar o sistema de coordenadas polares e o sistema de coordenadas cartesianas é considerando o eixo polar coincidindo com o eixo OX e o pólo coincidindo com a origem do sistema cartesiano. As coordenadas retangulares $(x,\ y)$ e as coordenadas polares $(r,\ \theta)$ de um ponto P estão relacionadas da seguinte forma:

- $x = r\cos\theta, \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$
- $r^2 = x^2 + y^2, \quad tg\,\theta = \dfrac{y}{x} \quad se \quad x \neq 0$

Graficamente:



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \theta = \mathrm{arc\,tg}\ y/x\ ,\ x \neq 0. \\ \text{Se } x = 0\ ,\ \theta = \pi/2\ . \end{cases}$$

Exercício 3: Encontre uma equação cartesiana equivalente para a equação polar.

a- $r^2 = 4r\cos\theta$

b- $r = \dfrac{4}{2\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}$

Exercício 4: Encontre uma equação polar equivalente para a equação cartesiana.

$$x^2 + (y - 3) = 9$$

INTEGRAIS EM COORDENADAS POLARES

Pode-se achar a área de certas regiões delimitadas por gráficos de equações polares utilizando-se limites de somas de áreas de setores circulares.

Teorema: Se f é contínua e $f(\theta) \geq 0$ em $[\alpha, \beta]$, onde $a \leq \alpha \leq \beta \leq 2\pi$, então a área A da região delimitada pelos gráficos de $r = f(\theta)$, $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$ é

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}[f(\theta)]^2 d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

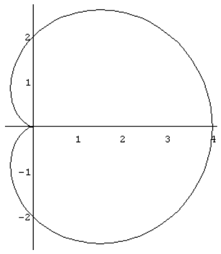
Portanto a área da região entre a origem e a curva $r = f(\theta)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$, é

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

Diretrizes para achar a área de uma região

- Esboce a região, traçando o gráfico de $r = f(\theta)$. Ache o menor valor $\theta = \alpha$ e o maior valor $\theta = \beta$ para pontos (r, θ) na região.
- Esboce um setor circular típico e indique seu ângulo central $d\theta$.
- Expresse a área do setor da diretriz anterior como $\frac{1}{2} r^2 d\theta$.
- Aplique à expressão da diretriz anterior o operador limite de somas $\int_{\alpha}^{\beta}$ e calcule a integral.

Exemplo 1: Encontre a área da região no plano limitada pela cardióide $r = 2(1+\cos\theta)$.



Exemplo 2: Encontre a área dentro do laço menor da *limaçon* $r = 2\cos\theta + 1$.