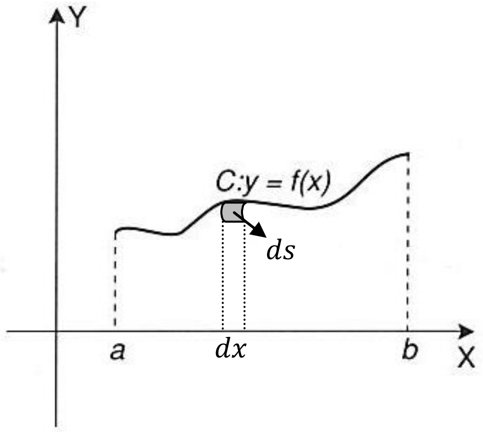
Área de superfície de Revolução

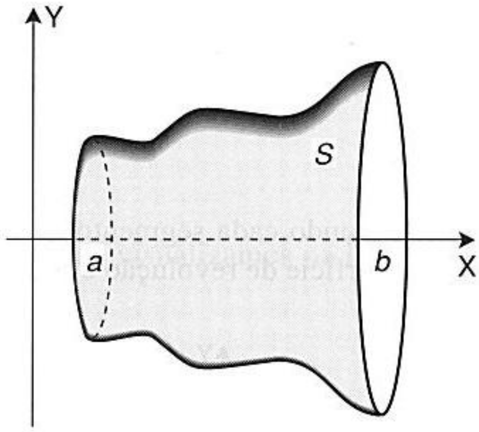
Áreas de superfície de Revolução

A área de revolução consiste na rotação de um arco em torno de um eixo.

Este conceito é aplicado, entre outros, para determinação de centróides e momento de inércia de arcos e superfícies de revolução.

Se A (a,c) e B(b,d) são dois pontos da curva $y = f(x)$ onde $f(x)$ *e* $f'(x)$ são continuas, e $f(x)$ não muda de sinal no intervalo [a,b] então a área da superfície gerada pela rotação do arco AB em torno do eixo x é dado por:





O comprimento do arco é dado por:

$$s = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Basta multiplicar o comprimento de arco pelo comprimento da circunferência que é $2\pi y$ e portanto:

$$A_x = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\ dx$$

Se é $f'(x) \neq 0$ no intervalo, uma forma alternativa:

$$A_x = 2\pi \int_c^d y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

Se A (a, c) e B(b,d) são dois pontos da curva $x = g(y)$, onde $g(y)$ e sua derivada com relação a y satisfazem as mesmas condições anteriores a área da superfície gerada em relação a rotação em torno do eixo y é dada por:

Área de superfície de Revolução

$$A_y = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$= 2\pi \int_c^d x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$$

Se $A(u = u_1)$ e $B(u = u_2)$ são dois pontos de curva definidas pelas equações paramétricas $x = f(u), y = f(u)$ e se as condições de continuidade são satisfeitas, então a área da superfície gerada em torno de x.

$$A_x = 2\pi \int_{u_1}^{u_2} y\sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2+\left(\frac{dy}{du}\right)^2}\,du$$

Analogamente, em torno do eixo y.

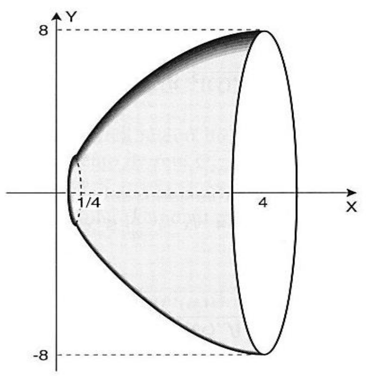
$$A_y = 2\pi \int_{u_1}^{u_2} x\sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2+\left(\frac{dy}{du}\right)^2}\,du$$

Vamos a alguns exemplos de aplicação.

Exemplo 1:

Calcular a área da superfície de revolução obtida pela rotação, em torno do eixo x de curva dada por $y = 4\sqrt{x},\ \frac{1}{4} \le x \le 4$. Plotando o gráfico temos:

Esboçando o Gráfico temos:



$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{2}\sqrt{x} = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

Substituindo-se na relação da área tem-se:

Área de superfície de Revolução

$$A_x = 2\pi \int_{1/4}^{4} 4\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{4}{x}}\,dx$$

$$= 8\pi \int_{1/4}^{4} \sqrt{x}\sqrt{\frac{x+4}{\sqrt{x}}}\,dx$$

$$= 8\pi \int_{1/4}^{4} \sqrt{x+4}\,dx$$

A integral é por substituição.

$$u = x + 4 \rightarrow du = dx$$

$$x = \frac{1}{4} \rightarrow u = \frac{1}{4} + 4 = \frac{17}{4}$$

$$x = 4 \rightarrow u = 8$$

$$A_x = 8\pi \int_{17/4}^{8} u^{1/2}\,du = 8\pi \left.\frac{u^{3/2}}{3/2}\right|_{-17/4}^{8} = \frac{16}{3}\pi\left(8^{3/2} - \left(\frac{17}{4}\right)^{3/2}\right)$$

$$= \frac{16}{3}\pi\left((2)^3 - \frac{17\sqrt{17}}{8}\right) = \frac{2}{3}\pi\left(8.2^{9/2} - 17\sqrt{17}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\pi(8.2^4\sqrt{2} - 17\sqrt{17})$$

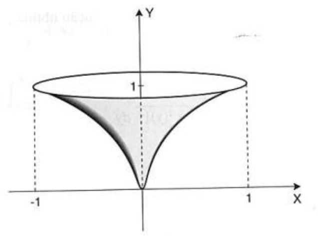
$$= \frac{2}{3}\pi(128\sqrt{2} - 17\sqrt{17})\ u.a.$$

$u.a.$ é unidade de área.

Exemplo 2:

Calcular a área de superfície de revolução em torno do eixo y, da curva dada por $x = y^3, 0 \leq y \leq 1$.

Esboçando o gráfico.



Derivando-se a função:

$$\frac{dx}{dy} = 3y^2$$

Substituindo-se na equação da área.

Área de superfície de Revolução

$$A_y = 2\pi \int_0^1 y^3 \sqrt{1 + 9y^4}\, dy$$

Substituindo-se

$$u = 1 + 9y^4 \quad \rightarrow \quad du = 36y^3 dx$$

$$\therefore \frac{du}{36} = x^3 dy$$

$$y = 0 \rightarrow u = 1$$

$$y = 1 \rightarrow u = 10$$

Substituindo-se u na integral tem-se:

$$A_y = \frac{2\pi}{36} \int_1^{10} u^{1/2}\, du = \frac{\pi}{18} \int_1^{10} u^{1/2}\, du$$

$$= \frac{\pi}{18} \frac{u^{3/2}}{3/2}\Big|_1^{10} = \frac{\pi}{27} (10^{3/2} - 1)$$

$$= \frac{\pi}{27} \left(10\sqrt{10} - 1\right) \quad u.a.$$

Exemplo 3:

Determine a área da superfície de revolução dada pelas equações paramétricas $x = t \; e \; y = t^2$. No intervalo de 0 a 4.

a) Em torno do eixo x.
b) Em torno do eixo y.

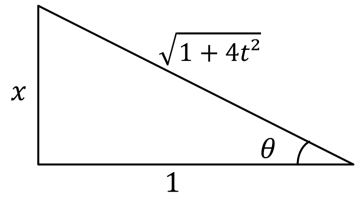
Resolvendo-se.

a) $\frac{dx}{dt} = 1 \; \frac{dy}{dt} = 2t$

Para o eixo x

$$A_x = 2\pi \int_0^4 t^2 \sqrt{1 + 4t^2}\, dt$$

Esta integral e resolvida por substituição trigonométrica do tipo:



$$2t = tg\theta$$

$$t = \frac{1}{2}\, tg\theta$$

Área de superfície de Revolução

$$dt = \frac{1}{2}\sec^2\theta \; d\theta$$

$$A_x = 2\pi \int \frac{tg^2\theta}{4}\sqrt{1+tg^2\theta}\,\frac{1}{2}\,sec^2\theta d\theta$$
$$= \frac{\pi}{4}\int tg^2\theta sec\theta\; sec^2\theta d\theta$$
$$= \frac{\pi}{4}\int tg^2\theta sec^2\theta\; sec\theta d\theta$$
$$= \frac{\pi}{4}\int (-1+sec^2\theta)sec^3\theta d\theta$$
$$A_x = \frac{\pi}{4}\left[\int sec^2\theta d\theta - \int sec^3\theta d\theta\right]$$

Utilizando a tabela de integrais,

$$A_x = \frac{\pi}{16}(sec^3\theta tg\theta - \frac{1}{2}(sec\theta tg\theta + ln|sec\theta tg\theta|)$$
$$= \frac{\pi}{16}\left(\sqrt{1+4t^2}\right)^3 2t - \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+4t^2}2t + ln\left|\sqrt{1+4t^2}+2t\right|\right)\Big|_0^4$$
$$= \frac{\pi}{16}2t(1+4t^2)\sqrt{1+4t^2} - t\sqrt{1+4t^2}\frac{1}{2}\; ln\left|\sqrt{1+4t^2}\; + 2t\right|\Big|_0^4$$

Substituindo os limites de integração:

$$A_x \approx 816{,}57\; u.a.$$

b) Em torno de y.

$$\frac{dx}{dt} = 1 \qquad \frac{dy}{dt} = 2t$$

$$A_y = 2\pi\int_0^4 t\sqrt{1+4t^2}\,dt$$

Substituindo $u = 1 + 4t^2$.

$$u = 1 + 4t^2 \quad \rightarrow \quad du = 8tdt$$
$$\frac{du}{8} = tdt$$

A integral fica:

$$A_y = \frac{2\pi}{8}\int u^{1/2}du = \frac{\pi}{4}\frac{u^{3/2}}{3/2} = \frac{\pi}{6}(1+4t^2)^{3/2}\Big|_0^4$$
$$A_y = \frac{\pi}{6}\left[(1+4.4^2)^{3/2} - (1+0)^{3/2}\right]$$

Área de superfície de Revolução

$$A_y = \frac{\pi}{6}\left(65\sqrt{65} - 1\right) \ \ u.a$$

Vamos verificar um caso conhecido de curvas paramétricas que é o cálculo de área de uma superfície esférica cujo resultado deve ser $4\pi R^2$.

Exemplo 4:

Determine a área de uma superfície esférica cujas funções são:

$$x = R\ cos\theta$$
$$y = R\ sen\theta$$

Nas duas condições:

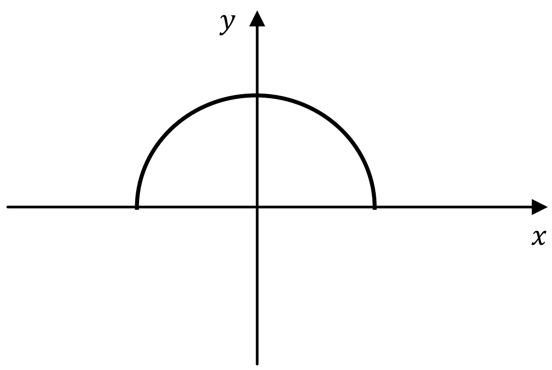
a) Revolução sobre o eixo x sabendo-se que $0 \leq \theta \leq \pi$.
b) Revolução sobre o eixo y sabendo-se que $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

É importante observar que os intervalos escolhidos dependem do eixo de revolução. Desta forma é necessário que sejam diferentes.

Derivando as funções tem-se:

$$\frac{dx}{d\theta} = -R\ sen\theta$$
$$\frac{dy}{d\theta} = R\ cos\theta$$

a) Para o eixo do x o gráfico é:



O semi circulo envolve o 1º e 2º quadrantes.

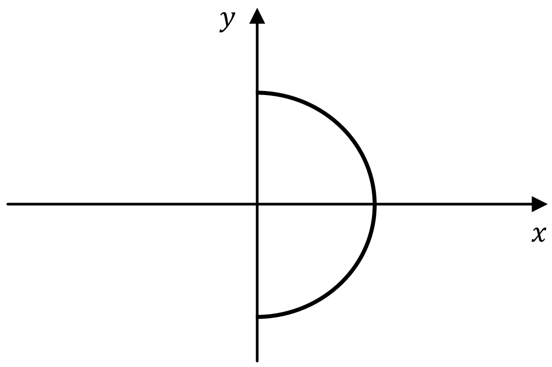
Desta forma:

$$A_x = 2\pi\int_0^{\pi} Rsen\theta\sqrt{R^2sen^2\theta + R^2cos\theta}\ d\theta$$
$$A_x = 2\pi\int_0^{\pi} R^2sen\theta\sqrt{sen^2\theta + cos^2\theta}\ d\theta$$

$$= 2\pi R^2 \int_0^{\pi} sen\theta \, d\theta = -2\pi R^2 cos\theta \Big|_0^{\pi}$$

$$= -2\pi R^2(-1-1) = 4\pi R^2 \; u.a.$$

b) Para o eixo y, o gráfico é:



O semi circulo envolve o 1º e 4º quadrantes.

Desta forma:

$$A_y = 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} Rcos\theta\sqrt{R^2 \operatorname{sen}^2\theta \; R^2 cos^2\theta} \;\; d\theta$$

$$= 2\pi R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos\theta d\theta = 2\pi R^2 \; sen\,\theta \Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2\pi R^2\big(1-(-1)\big) = 4\pi R^2$$

Caso comprovado!

Da mesma forma que foi feito para o comprimento de arco, é possível calcular a área da casca esférica dada pela função $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ no intervalo $-1 \leq x \leq 1$ fazendo-se a revolução em torno do eixo x. Este caso vai ficar como exercício para o aluno.