brazil

UFCG/CCT/UAMat

Cálculo Diferencial e Integral I - 2019.1

Prof. Romildo Lima

3ª Lista de Exercícios - Integração

1. Calcule as integrais abaixo:

   (a) $\displaystyle\int_{-2}^{0}(2x+5)dx$

   (b) $\displaystyle\int_{-3}^{4}\left(5-\frac{x}{2}\right)dx$

   (c) $\displaystyle\int_{0}^{1}(x^2+\sqrt{x})dx$

   (d) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/3}2\sec^2 x dx$

   (e) $\displaystyle\int_{0}^{\pi}(1+\cos x)dx$

   (f) $\displaystyle\int_{-\pi/3}^{-\pi/4}\left(4\sec^2 t+\frac{\pi}{t^2}\right)dt$

   (g) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{sen(2x)}{2sen(x)}dx$

   (h) $\displaystyle\int_{0}^{1/2}\frac{4}{\sqrt{1-x^2}}dx$

2. Determine dy/dx:

   (a) $\displaystyle y=\int_{0}^{x}\sqrt{1+t^2}dt$

   (b) $\displaystyle y=\int_{1}^{x}\frac{1}{t}dt$

   (c) $\displaystyle y=x\int_{2}^{x^2}sen(t^3)dt$

   (d) $\displaystyle y=\int_{0}^{sen(x)}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},\ |x|<\frac{\pi}{2}$

   (e) $\displaystyle y=\int_{0}^{e^{x^2}}\frac{1}{\sqrt{t}}dt$

   (f) $\displaystyle y=\int_{0}^{sen^{-1}(x)}\cos(t)dt$

   (g) $\displaystyle y=\int_{\cos x}^{\operatorname{sen} x}\ln(1+2t)dt$

   (h) $\displaystyle y=\int_{x}^{x^2}e^{t^2}dt$

3. Encontrar uma primitiva F, da função $f(x)=x^{2/3}+x$, que satisfaça $F(1)=1$.

4. Encontrar uma primitiva da função $f(x)=\dfrac{1}{x^2}+1$ que se anule no ponto $x=2$.

5. Calculando as integrais $I_1=\displaystyle\int_1^2 x^2dx$, $I_2=\displaystyle\int_1^2 xdx$ e $I_3=\displaystyle\int_1^2 dx$, obtemos $I_1=7/3$, $I_2=3/2$ e $I_3=1$. Usando estes resultados, encontrar o valor de:

(a) $\int_1^2 6x - 1dx$

(b) $\int_1^2 2x(x+1)dx$

(c) $\int_2^1 (x-1)(x-2)dx$

(d) $\int_1^2 (3x+2)^2dx$

6. Em cada um dos itens abaixo, calcular a integral da função no intervalo dado e esboçar seu gráfico.

   (a) $f(x) = \begin{cases} 2x+5, & -1 \leq x < 0 \\ 5, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$; em $[-1, 1]$

   (b) $f(x) = 2|x|$; em $[-1, 1]$

   (c) $f(x) = x - \frac{|x|}{2}$; em $[-1, 1]$

7. Determine a área total entre a região e o eixo x:

   (a) $y = -x^2 - 2x$, $-3 \leq x \leq 2$

   (b) $y = 3x^2 - 3$, $-2 \leq x \leq 2$

   (c) $y = x^3 - 3x^2 + 2x$, $0 \leq x \leq 2$

   (d) $y = x^{1/3} - x$, $-1 \leq x \leq 8$

8. Calcule as integrais indefinidas abaixo, usando as substituições dadas para reduzir as integrais à forma padrão.

   (a) $\int 2(2x+4)^5dx$, $u = 2x+4$

   (b) $\int 2x\sqrt{x^2+5}^{\,-4}dx$, $u = x^2+5$

   (c) $\int (3x+2)(3x^2+4x)^4dx$

   (d) $\int sen(3x)dx$, $u = 3x$

   (e) $\int \sec(2t)tg(2t)dt$, $u = 2t$

   (f) $\int \left(1 - \cos\frac{t}{2}\right)^2 sen\frac{t}{2}dt$, $u = 1 - \cos\frac{t}{2}$

   (g) $\int \frac{9r^2dr}{\sqrt{1-r^3}}$, $u = 1 - r^3$

   (h) $\int \sqrt{x}sen^2(x^{3/2}-1)dx$, $u = x^{3/2} - 1$

9. Calcule as integrais abaixo.

(a) $\int \sqrt{3-2s}ds$

(b) $\int \theta\sqrt{1-\theta^2}d\theta$

(c) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}dx$

(d) $\int \cos(3z+4)dz$

(e) $\int \sec^2(3x+2)dx$

(f) $\int t^3(1+t^4)^3dt$

(g) $\int \frac{1}{x^2}\sqrt{2-\frac{1}{x}}dx$

(h) $\int \frac{dx}{x\ln x}$

(i) $\int \frac{\ln\sqrt{t}}{t}dt$

(j) $\int tg^2(x)\sec^2(x)dx$

(k) $\int sen^5\left(\frac{x}{3}\right)\cos\left(\frac{x}{3}\right)dx$

(l) $\int x^{1/2}sen(x^{3/2}+1)dx$

(m) $\int x(x-1)^{10}dx$

(n) $\int \frac{x}{(x^2-4)^3}dx$

(o) $\int \frac{x}{(x-4)^3}dx$

(p) $\int (\cos(x))e^{sen(x)}dx$

10. Calcule as integrais definidas abaixo.

(a) $\int_0^3 \sqrt{y+1}dy$

(b) $\int_0^{\pi/4} tg(x)\sec^2(x)dx$

(c) $\int_0^1 t^3(1+t^4)^3dt$

(d) $\int_{-1}^1 \frac{5r}{(4+r^2)^2}dr$

(e) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}}dx$

(f) $\int_0^{\pi/6} (1-\cos(3t))sen(3t)dt$

(g) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos(z)}{\sqrt{4+3sen(z)}}dz$

(h) $\int_0^1 \sqrt{t^5+2t}(5t^4+2)dt$

(i) $\int_0^{\pi} 5(5-4\cos(t))^{1/4}sen(t)dt$

(j) $\int_0^{\pi/4} (1+e^{tg(\theta)})\sec^2(\theta)d\theta$

(k) $\int_1^2 \frac{2\ln x}{x}dx$

(l) $\int_2^4 \frac{dx}{x(\ln x)^2}dx$

11. Determine as áreas das regiões compreendidas entre as retas e às curvas abaixo.

(a) $y=x^2-2$ e $y=2$

(b) $y=x^4$ e $y=8x$

(c) $y=x^2$ e $y=-x^2+4x$

(d) $y^2 - 4x = 4$ e $4x - y = 16$

12. Determine a área da região, no primeiro quadrante, delimitada pelas retas $y = x$ e $x = 2$, a curva $y = 1/x^2$ e o eixo x.

13. Determine a área entre as curvas $y = \ln(x)$ e $y = \ln(2x)$ de $x = 1$ até $x = 5$.

14. Encontre a área da região delimitada pelas curvas abaixo:

    (a) $y = x^2 \ln x$ e $y = 4 \ln x$.

    (b) $y = x^2 e^{-x}$ e $y = xe^{-x}$.

15. Se $f(0) = g(0) = 0$ e f'' e g'' forem contínuas, mostre que

$$\int_0^a f(x)g''(x)dx = f(a)g'(a) - f'(a)g(a) + \int_0^a f''(x)g(x)dx.$$

16. Suponha que $f(1) = 2$, $f(4) = 7$, $f'(1) = 5$, $f'(4) = 3$ e f'' seja contínua. Encontre o valor de $\displaystyle\int_1^4 xf''(x)dx$.

17. Calcule as integrais usando integração por partes.

    (a) $\displaystyle\int x \operatorname{sen} \frac{x}{2} dx$

    (b) $\displaystyle\int t^2 \cos t dt$

    (c) $\displaystyle\int_1^2 x \ln x dx$

    (d) $\displaystyle\int xe^x dx$

    (e) $\displaystyle\int (x^2 - 2x + 1)e^{2x} dx$

    (f) $\displaystyle\int x \sec^2 x dx$

    (g) $\displaystyle\int x^3 e^x dx$

    (h) $\displaystyle\int p^4 e^{-p} dp$

    (i) $\displaystyle\int (x^2 - 5x)e^x dx$

    (j) $\displaystyle\int (r^2 + r + 1)e^r dr$

    (k) $\displaystyle\int x^5 e^x dx$

    (l) $\displaystyle\int t^2 e^{4t} dt$

    (m) $\displaystyle\int e^\theta \operatorname{sen} \theta d\theta$

    (n) $\displaystyle\int e^{-y} \cos y dy$

    (o) $\displaystyle\int e^{-2x} \operatorname{sen} 2x dx$

18. Calcule as integrais usando uma substituição antes da integração por partes.

(a) $\int e^{\sqrt{3s+9}} ds$

(b) $\int_0^1 x\sqrt{1-x}dx$

(c) $\int_0^{\pi/3} x \operatorname{tg}^2 x dx$

(d) $\int \ln(x+x^2)dx$

(e) $\int \operatorname{sen}(\ln x)dx$

(f) $\int z(\ln z)^2 dz$

19. Calcule $\int \operatorname{sen} x \cos x dx$ por quatro métodos diferentes:

    (a) a substituição $u = \cos x$;

    (b) a substituição $u = \operatorname{sen} x$;

    (c) a identidade $\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x$;

    (d) integração por partes.

20. Encontre a área da região delimitada pelas curvas dadas:

    (a) $y = \operatorname{sen}^2 x$ e $y = \operatorname{sen}^3 x$, $x \in [0, \pi]$;

    (b) $y = \operatorname{tg} x$ e $y = \operatorname{tg}^2 x$, $x \in [0, \pi/4]$.

21. Determine a área da região delimitada pela curva $y = \operatorname{sen} x$ e pelo eixo x para:

    (a) $0 \leq x \leq \pi$

    (b) $\pi \leq x \leq 2\pi$

    (c) $2\pi \leq x \leq 3\pi$

    (d) Que padrão pode ser reconhecido aqui? Qual é a área entre a curva e o eixo x para $n\pi \leq x \leq (n+1)\pi$, sendo n um inteiro arbitrário não negativo? Justifique sua resposta.

22. Calcule as integrais.

    (a) $\int \cos(2x)dx$

    (b) $\int_0^{\pi} 3 \operatorname{sen} \frac{x}{3} dx$

    (c) $\int \operatorname{sen}^3 x dx$

    (d) $\int \cos^3 x dx$

(e) $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^3 x dx$

(f) $\int \cos^2 x dx$

(g) $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^7 y dy$

(h) $\int_0^{\pi} 8 \operatorname{sen}^4 x dx$

(i) $\int 16 \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x dx$

(j) $\int 8 \cos^3(2\theta) \operatorname{sen}(2\theta) d\theta$

23. **Estratégia para Calcular** $\int \operatorname{tg}^m x \sec^n x dx$**:**

   - Se a potência da secante é par ($n = 2k$, $k \geq 2$), guarde um fator de $\sec^2 x$ e use $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ para expressar os fatores restantes em termos de $\operatorname{tg} x$:

     $$\int \operatorname{tg}^m x \sec^{2k} x dx = \int \operatorname{tg}^m x (\sec^2 x)^{k-1} \sec^2 x dx = \int \operatorname{tg}^m x (1+\operatorname{tg}^2 x)^{k-1} \sec^2 x dx.$$

     A seguir, substitua $u = \operatorname{tg} x$.

   - Se a potência da tangente for ímpar ($m = 2k+1$), guarde um fator de $\sec x \operatorname{tg} x$ e use $\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$ para expressar os fatores restantes em termos de $\sec x$:

     $$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^{2k+1} x \sec^n x dx &= \int (\operatorname{tg}^2 x)^k \sec^{n-1} x \sec x \operatorname{tg} x dx \\ &= \int (\sec^2 x - 1)^k \sec^{n-1} x \sec x \operatorname{tg} x dx \end{aligned}$$

     A seguir, substitua $u = \sec x$.

   Com esta estratégia em mente, determine:

   (a) $\int \operatorname{tg}^3 x dx$ (b) $\int \operatorname{tg}^6 x \sec^4 x dx$ (c) $\int \operatorname{tg}^5 x \sec^7 x dx$

24. Recorde as relações trigonométricas (faça uma pesquisa) e calcule as integrais:

   (a) $\int \sec^3 x dx$ (b) $\int \operatorname{sen}(4x) \cos(5x) dx$

25. Calcule a integral usando a substituição trigonométrica indicada.

   (a) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-9}} dx$, $x = 3\sec\theta$

   (b) $\int x^3\sqrt{9-x^3} dx$, $x = 3\operatorname{sen}\theta$;

(c) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+9}}dx$, $x = 3\operatorname{tg} x$.

26. Calcule as integrais.

(a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}dx$

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}dt$

(c) $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\sqrt{1-\cos x}}dx$

(d) $\displaystyle\int_{5\pi/6}^{\pi} \frac{\cos^4 x}{\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}dx$

(e) $\displaystyle\int \sqrt{25-t^2}dt$

(f) $\displaystyle\int \sqrt{1-9t^2}dt$

27. Expresse os integrandos como soma de frações parciais e calcule as integrais.

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+2x+1}dx$

(b) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{x^3}{x^2-2x+1}dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-1)^2}$

(d) $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{(x-1)(x^2+2x+1)}$

(e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$

(f) $\displaystyle\int \frac{y^2+2y+1}{(y^2+1)^2}$

(g) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^4-1}dx$

(h) $\displaystyle\int \frac{2x^3-2x^2+1}{x^2-x}dx$