Integração por partes

Introdução

Para cada regra da diferenciação tem uma regra correspondente de integração. Vimos que a Regra da Substituição corresponde a Regra da Cadeia. A regra que corresponde à Regra do Produto para a diferenciação é chamada de *Integração por Partes.*

A Regra do Produto estabelece que se f e g são diferenciáveis, então:

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(uv) = uv' + vu'$$

Na notação de integrais indefinidas essa equação torna-se:

$$\int [f(x)g'(x) + g(x)f'(x)]dx = f(x)g(x) \quad \Rightarrow \quad \int f\,dx = F \quad \text{TFC1}$$

$$\int f(x)g'(x)dx + \int g(x)f'(x)dx = f(x)g(x)$$

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx \quad \Rightarrow \quad \boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

EXEMPLO 1:

$$\int xsenxdx \qquad\qquad \int udv = uv - \int vdu$$

RESOLUÇÃO:

$$u = x \qquad dv = senxdx$$

$$du = dx \qquad v=-\cos x$$

$$\int \underset{u}{x}\,\underbrace{senxdx}_{dv} = \underset{u}{x}(\underbrace{-\cos x}_{v}) - \int \underbrace{(-\cos x)}_{v}\,\underset{du}{dx}$$

$$= -x\cos x + senx + C$$

Objetivo: encontrar uma integral mais simples que a integral de partida.
Se tivéssemos escolhido u=senx e dv=xdx:

$$u = senx \qquad dv = xdx$$

$$\int xsenxdx = senx\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int x^2\cos xdx$$

$$du = \cos xdx \qquad v=\frac{x^2}{2}$$

mais complicada!

EXEMPLO 2:

$$\int x^2 e^x dx$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$u = x^2$ $\quad dv = e^x dx$

$du = 2x dx$ $\quad$ v=e^x

RESOLUÇÃO:

$$\int \underbrace{x^2}_{u} \underbrace{e^x dx}_{dv} = \underbrace{x^2}_{u} \underbrace{e^x}_{v} - \int \underbrace{e^x}_{v} \underbrace{2x dx}_{du}$$

$$= x^2 e^x - 2\boxed{\int x e^x dx}$$

Mais simples! Mas não imediata.

$u = x$ $\quad dv = e^x dx$

$du = dx$ $\quad$ v=e^x

$$\int x e^x dx = x e^x - \boxed{\int e^x dx}$$

Imediata!

$$= x^2 e^x - 2x e^x + 2\int e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C$$

EXEMPLO 3:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int \ln x\,dx$$

$u = \ln x$ $\qquad$ $dv = dx$

$du = \dfrac{1}{x}dx$ $\qquad$ v=x

RESOLUÇÃO:

$$\int \underbrace{\ln x}_{u}\,\underbrace{dx}_{dv} = \underbrace{x}_{v}\,\underbrace{\ln x}_{u} - \int \underbrace{x}_{v}\,\underbrace{\frac{dx}{x}}_{du} =$$

$$= x\ln x - \boxed{\int dx} \longrightarrow$$ Simples e imediata!

$$= x\ln x - x + C$$

Se combinarmos a fórmula de integração por partes com a TFC2, podemos avaliar integrais *definidas* por partes:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)g'(x)dx = \left[f(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx}$$