UFCG/CCT/UAMat

Cálculo Diferencial e Integral I - 2019.1

Prof. Romildo Lima

2ª Lista de Exercícios - Derivadas e Aplicações

1. Determinar a equação da reta tangente às seguintes curvas, nos pontos indicados. Use a definição por limite.

   (a) $f(x) = \sqrt{x}$; $x = 1$ e $x = 9$

   (b) $f(x) = x^2 - 1$; $x = 1$, $x = 0$, $x = a$, $a \in \mathbb{R}$

   (c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $x = \dfrac{1}{3}$, $x = 3$

   (d) $f(x) = \dfrac{1}{x-a}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 4\}$; $x = -2$, $x = 4$

   (e) $f(x) = 2\sqrt{x}$; $x = 0$, $x = 3$, $x = a$, $a > 0$

2. Determinar a equação da reta tangente à curva $y = 1 - x^2$, que seja paralela à reta $y = 1 - x$. Use a definição por limite.

3. Dadas as funções $f(x) = 5 - 2x$ e $g(x) = 3x^2 - 1$, usando a definição por limite, determine:

   (a) $f'(1) + g'(1)$

   (b) $f(2) - f'(2)$

   (c) $f\left(\dfrac{5}{2}\right) - \dfrac{f'(5/2)}{g'(5/2)}$

   (d) $2f'(0) - g'(-2)$

   (e) $[g'(0)]^2 + \dfrac{1}{2}g'(0) + g(0)$

4. Usando a definição, determinar a derivada das seguintes funções:

   (a) $f(x) = 1 - 4x^2$

   (b) $f(x) = 2x^2 - x - 1$

   (c) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$

   (d) $f(x) = \dfrac{1-x}{x+3}$

   (e) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$

5. Use a fórmula alternativa da definição de derivada, para determinar a derivada das funções abaixo.

   (a) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$

   (b) $f(x) = x^2 - 3x + 4$

   (c) $g(x) = \dfrac{x}{x-1}$

   (d) $g(x) = 1 + \sqrt{x}$

6. Dada a função $f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \geq 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$, verificar se existe $f'(0)$. Esboçar o gráfico.

7. Dada a função $f(x) = 2x^2 - 3x - 2$, determinar os intervalos em que $f'(x) > 0$ e $f'(x) < 0$.

8. Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & |x| \leq 1 \\ 1 - x^2, & |x| > 1 \end{cases}$.

    (a) Esboçar o gráfico de f.

    (b) Verificar se f é contínua nos pontos -1 e 1.

    (c) Calcular $f'_-(-1)$, $f'_+(-1)$, $f'_-(1)$ e $f'_+(1)$.

    (d) Calcular $f'(x)$, obter o seu domínio e esboçar o gráfico.

9. Mostre que a função

$$g(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{se } \ x < 1 \\ -x + 4, & \text{se } \ x \geq 1 \end{cases}$$

não é derivável em $x = 1$. Esboce o gráfico de g.

10. Seja $g(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{se } \ x < 1 \\ -x + 3, & \text{se } \ x \geq 1 \end{cases}$

    (a) Esboce o gráfico de g.

    (b) g é derivável em $a = 1$?

11. Suponha que u e v sejam funções de x deriváveis em $x = 0$ e que: $u(0) = 5$, $u'(0) = -3$, $v(0) = -1$ e $v'(0) = 2$. Determine as derivadas das funções a seguir em $x = 0$.

    (a) $\dfrac{d}{dx}(uv)$

    (b) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right)$

    (c) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{v}{u}\right)$

    (d) $\dfrac{d}{dx}(7v - 2u)$

12. Determine as derivadas das funções abaixo.

    (a) $y = \dfrac{2x + 5}{3x - 2}$

    (b) $y = \dfrac{4 - 3x}{3x^2 + x}$

    (c) $g(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 0,5}$

    (d) $f(s) = \dfrac{\sqrt{s} - 1}{\sqrt{s} + 1}$

    (e) $v = \dfrac{1 + x - 4\sqrt{x}}{x}$

    (f) $r = 2\left(\dfrac{1}{\sqrt{\theta}} + \sqrt{\theta}\right)$

    (g) $y = \dfrac{1}{(x^2 - 1)(x^2 + x + 1)}$

    (h) $y = \dfrac{(x + 1)(x + 2)}{(x - 1)(x - 2)}$

    (i) $y = 2e^{-x} + e^x$

    (j) $y = \dfrac{x^2 + 3e^x}{2e^x - x}$

    (k) $y = x^{-3/5} + \pi^{3/2}$

    (l) $r = e^{\theta}\left(\dfrac{1}{\theta^2} + \theta^{-\pi/2}\right)$

13. Determine a primeira e segunda derivada das funções abaixo.

(a) $y = -x^2 + 1$

(b) $y = x^2 + x + 8$

(c) $y = 5t^3 - 3t^5$

(d) $w = 3z^7 - 7z^3 + 21z^2$

(e) $y = \dfrac{4x^3}{3} - x + 2e^x$

(f) $y = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x}{4}$

(g) $y = 6x^2 - 10x - 5x^2$

(h) $y = 4 - 2x - x^3$

(i) $r = \dfrac{1}{3s^2} - \dfrac{5}{2s}$

(j) $r = \dfrac{12}{\theta} - \dfrac{4}{\theta^3} + \dfrac{1}{\theta^4}$

14. Seja $p(x) = (x-a)(x-b)$, $a, b \in \mathbb{R}$. Mostrar que se $a \neq b$, então $p(a) = p(b) = 0$, mas $p'(a) \neq 0$ e $p'(b) \neq 0$.

15. Determine as derivadas das funções abaixo.

(a) $y = -10x + 3\cos x$

(b) $y = \dfrac{3}{x} + 5senx$

(c) $y = x^2 \cos x$

(d) $y = \sqrt{x}\sec x + 3$

(e) $y = x^2 cotgx - \dfrac{1}{x^2}$

(f) $f(x) = sen(x)tg(x)$

(g) $y = (senx + \cos x)\sec x$

(h) $y = \dfrac{cotgx}{1 + cotgx}$

(i) $y = \dfrac{\cos x}{x} + \dfrac{x}{\cos x}$

(j) $y = x^2 senx + 2x\cos x - 2senx$

(k) $f(x) = x^3 senx \cos x$

(l) $g(x) = (2-x)tg^2 x$

16. No instante t, a posição de um corpo que se desloca ao longo do eixo s é $s = t^3 - 6t^2 + 9t$ em metros (m).

(a) Determine a aceleração do corpo cada vez que a velocidade for nula.

(b) Determine o módulo da velocidade do corpo cada vez que a aceleração for nula.

(c) Determine a distância total percorrida pelo corpo de $t = 0$ a $t = 2$.

17. As equações para queda livre nas superfícies de Marte e Júpiter (sendo s dado em metros e t em segundos) são $s = 1,86t^2$ em Marte e $s = 11,44t^2$ em Júpiter. Quanto tempo uma pedra leva, a partir do repouso, para atingir a velocidade de $27,8m/s$ (cerca de $100Km/h$) em cada planeta?

18. Dados $y = f(u)$ e $u = g(x)$, determine $dy/dx = f'(g(x))g'(x)$ nos itens abaixo.

(a) $y = 6u - 9$, $u = (1/2)x^4$

(b) $y = 2u^3$, $u = 8x - 1$

(c) $y = sen(u)$, $u = 3x + 1$

(d) $y = \cos(u)$, $u = -x/3$

(e) $y = \cos(u)$, $u = sen(x)$

(f) $y = sen(u)$, $u = x - \cos(x)$

(g) $y = tg(u)$, $u = 10x - 5$

(h) $y = -\sec(u)$, $u = x^2 + 7x$

19. Escreva as funções na forma $y = f(u)$ e $u = g(x)$. Em seguida, determine dy/dx em função de x.

(a) $y = (2x+1)^5$

(b) $y = \left(1 - \frac{x}{7}\right)^{-7}$

(c) $y = \left(\frac{x^2}{8} + x - \frac{1}{x}\right)^4$

(d) $y = \sqrt{3x^2 - 4x + 6}$

(e) $y = sen^3(x)$

(f) $y = 5\cos^{-4}(x)$

(g) $y = e^{-5x}$

(h) $y = e^{(4\sqrt{x}+x^2)}$

20. Determine as derivadas das funções.

(a) $q = (2r - r^2)^{1/3}$

(b) $s = \frac{4}{3\pi} sen(3t) + \frac{4}{5\pi}\cos(5t)$

(c) $s = sen\left(\frac{3\pi t}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\pi t}{2}\right)$

(d) $y = \frac{1}{21}(3x-2)^7 + \left(4 - \frac{1}{2x^2}\right)^{-1}$

(e) $y = x^2 sen^4(x) + x\cos^{-2}(x)$

(f) $y = \frac{1}{x} sen^{-5}(x) - \frac{x}{3}\cos^3(x)$

(g) $y = (4x+3)^4(x+1)^{-3}$

(h) $y = (2x-5)^{-1}(x^2-5x)^6$

(i) $y = xe^{-x} + e^{3x}$

(j) $y = (9x^2 - 6x + 2)e^{x^3}$

(k) $h(x) = xtg(2\sqrt{x}) + 7$

(l) $f(\theta) = \left(\frac{sen(\theta)}{1+\cos\theta}\right)^2$

(m) $g(t) = \left(\frac{1 + sen(3t)}{3 - 2t}\right)^{-1}$

(n) $r = sen(\theta^2)\cos(2\theta)$

(o) $y = \cos(e^{-\theta^2})$

(p) $y = \theta^3 e^{-2\theta}\cos(5\theta)$

21. Determine dy/dt.

(a) $y = e^{\cos^2(\pi t - 1)}$

(b) $y = (e^{sen(t/2)})^3$

(c) $y = sen(\cos(2t-5))$

(d) $y = \cos\left(5sen\left(\frac{t}{3}\right)\right)$

22. Calcule y''.

(a) $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^3$

(b) $y = x(2x+1)^4$

(c) $y = e^{x^2} + 5x$

(d) $y = sen(x^2 e^x)$

23. Determine o valor de $(f \circ g)'$ no valor fornecido de x.

(a) $f(u) = u^5 + 1$, $u = g(x) = \sqrt{x}$, $x = 1$

(b) $f(u) = 1 - \frac{1}{u}$, $u = g(x) = \frac{1}{1-x}$, $x = -1$

(c) $f(u) = \frac{2u}{u^2+1}$, $u = g(x) = 10x^2 + x + 1$, $x = 0$

(d) $f(u) = \left(\dfrac{u-1}{u+1}\right)^2$, $u = g(x) = \dfrac{1}{x^2} - 1$, $x = -1$

24. Suponha que $f'(3) = -1$, $g'(2) = 5$, $g(2) = 3$ e $y = f(g(x))$. Qual o valor de y' quando $x = 2$?

25. Suponha que as funções f e g e suas derivadas em relação a x tenham os seguintes valores em $x = 0$ e $x = 1$.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
0	1	1	5	1/3
1	3	-4	$-1/3$	$-8/3$

Determine as derivadas em relação a x das seguintes combinações usando o valor dado de x.

(a) $5f(x) - g(x)$, $x = 1$

(b) $f(x)g^3(x)$, $x = 0$

(c) $\dfrac{f(x)}{g(x)+1}$, $x = 1$

(d) $f(g(x))$, $x = 0$

(e) $g(f(x))$, $x = 0$

(f) $(x^{11} + f(x))^{-2}$, $x = 1$

(g) $f(x + g(x))$, $x = 0$

26. Use a derivação implícita para determinar dy/dx.

(a) $x^2y + xy^2 = 6$

(b) $x^3 + y^3 = 18xy$

(c) $x^2(x-y)^2 = x^2 - y^2$

(d) $y^2 = \dfrac{x-1}{x+1}$

(e) $x^3 = \dfrac{2x-y}{x+3y}$

(f) $x = tg(y)$

(g) $x^4 + sen(y) = x^3y^2$

(h) $y sen\left(\dfrac{1}{y}\right) = 1 - xy$

(i) $e^{2x} = sen(x + 3y)$

(j) $e^{x^2y} = 2x + 2y$

27. Use a derivação implícita para determinar dy/dx e depois d^2y/dx^2.

(a) $x^2 + y^2 = 1$

(b) $y^2 = e^{x^2} + 2x$

(c) $y^2 - 2x = 1 - 2y$

(d) $2\sqrt{y} = x - y$

28. Se $x^3 + y^3 = 16$, determine o valor de d^2y/dx^2 no ponto $(2, 2)$.

29. Se $xy + y^2 = 1$, determine o valor de d^2y/dx^2 no ponto $(0, -1)$.

30. Determine $f^{-1}(x)$, esboce em um único gráfico f e f^{-1} e calcule df/dx em $x = a$ e df^{-1}/dx em $x = f(a)$ para mostrar que nesses pontos $df^{-1}/dx = 1/(df/dx)$.

(a) $f(x) = 2x + 3$, $a = -1$

(b) $f(x) = (1/5)x + 7$, $a = -1$

(c) $f(x) = 5 - 4x$, $a = 1/2$

(d) $f(x) = 2x^2$, $x \geq 0$, $a = 5$

31. Se $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1$, $x \geq 2$. Determine o valor de df^{-1}/dx no ponto $x = -1 = f(3)$.

32. Seja $f(x) = x^2 - 4x - 5$, $x > 2$. Determine o valor de df^{-1}/dx no ponto $x = 0 = f(5)$.

33. Determine as derivadas de y em relação a x ou t, conforme o caso.

(a) $y = \ln(3x)$

(b) $y = \ln(t^{3/2})$

(c) $y = \ln\left(\dfrac{10}{x}\right)$

(d) $y = \dfrac{\ln(t)}{t}$

(e) $y = \dfrac{\ln x}{1 + \ln x}$

(f) $y = \dfrac{x^4}{4}\ln x - \dfrac{x^4}{16}$

(g) $y = \ln(\ln(\ln x))$

(h) $y = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$

(i) $y = \dfrac{1 + \ln t}{1 - \ln t}$

34. Utilize a derivação logarítmica para determinar a derivada de y em relação à variável independente dada.

(a) $y = \sqrt{x(x+1)}$

(b) $y = \sqrt{(x^2+1)(x-1)^2}$

(c) $y = \sqrt{\dfrac{t}{t+1}}$

(d) $y = \dfrac{\theta + 5}{\theta \cos\theta}$

(e) $y = \sqrt{\theta + 3}sen(\theta)$

(f) $y = t(t+1)(t+2)$

35. Determine a derivada de y em relação a θ ou t, conforme o caso.

(a) $y = \ln(\cos^2\theta)$

(b) $\ln(3\theta e^{-\theta})$

(c) $y = \ln(3te^{-t})$

(d) $y = \ln(2e^{-t}sen(t))$

36. Determine dy/dx.

(a) $\ln(y) = e^y sen(x)$

(b) $\ln(xy) = e^{x+y}$

(c) $x^y = y^x$

(d) $tg(y) = e^x + \ln x$

37. Determine a derivada de y em relação à variável independente dada.

(a) $y = 2^x$

(b) $y = \log_2 5\theta$

(c) $y = \log_3(1 + \theta\ln 3)$

(d) $y = \log_{25} e^x - \log_5 \sqrt{x}$

(e) $y = \log_3 r \cdot \log_9 r$

(f) $y = \log_5 e^x$

38. Utilize a derivação logarítmica para determinar a derivada de y em relação à variável independente dada.

(a) $y = (x+1)^x$

(b) $y = x^{(x+1)}$

(c) $y = (\sqrt{t})^t$

(d) $y = t^{\sqrt{t}}$

(e) $y = (sen(x))^x$

(f) $y = x^{sen(x)}$

39. Suponha que o raio r e a área $A = \pi r^2$ de um círculo sejam funções deriváveis de t. Escreva uma equação que relacione dA/dt e dr/dt.

40. Suponha que o raio r e a área da superfície $S = 4\pi r^2$ de uma esfera sejam funções deriváveis de t. Escreva uma equação que relacione dS/dt e dr/dt.

41. A área da superfície de um cubo aumenta à taxa de $72m^2/s$. A que taxa o volume do cubo varia quando o comprimento do lado é de $x = 3m$?

42. Quando um prato circular de metal é aquecido em um forno, seu raio aumenta a uma taxa de $0,01cm/min$. A que taxa a área do prato aumenta quando seu raio for de $50cm$?

43. Um tanque tem a forma de um cone invertido com $16m$ de altura e uma base com $4m$ de raio. A água "flui"no tanque a uma taxa de $2m^3/min$. Com que velocidade o nível da água estará se elevando quando sua profundidade for de $5m$?

44. Um avião voa a $152,4m/s$ paralelamente ao solo, a uma altitude de $1.220m$ no sentido oeste, tomando como referência um holofote fixado no solo que o focaliza e que se encontra à esquerda da projeção vertical do avião em relação ao solo. Sabendo-se que a luz do holofote deverá permanecer iluminando o avião, qual deverá ser a velocidade angular (de giro) do holofote, no instante em que a distância horizontal entre ele e a projeção vertical do avião for de $610m$?

45. Determine os valores mínimo e máximo absolutos de cada função nos intervalos dados. Em seguida, esboce o gráfico da função. Identifique os pontos no gráfico em que os extremos absolutos ocorrem e inclua suas coordenadas.

    (a) $f(x) = \frac{2}{3}x - 5,\ -2 \leq x \leq 3$

    (b) $f(x) = -x - 4,\ -4 \leq x \leq 1$

    (c) $f(x) = -\frac{1}{x^2},\ 0,5 \leq x \leq 2$

    (d) $f(x) = -\frac{1}{x},\ -2 \leq x \leq -1$

46. Determine os valores extremos (absoluto e local) das funções e identifique onde ocorrem.

    (a) $y = 2x^2 - 8x + 9$

    (b) $y = x^3 - 2x + 4$

(c) $y = \sqrt{x^2 - 1}$

(d) $y = e^x - e^{-x}$

(e) $y = x \ln x$

47. Seja $f(x) = |x^3 - 9x|$.

(a) $f'(0)$ existe?

(b) $f'(3)$ existe?

(c) $f'(-3)$ existe?

(d) Determine todos os extremos de f.

Nos exercícios 48-55:

(a) Determine os intervalos abertos em que a função é crescente e aqueles em que ela é decrescente.

(b) Identifique os valores extremos absolutos e locais das funções, se houver, indicando onde ocorrem.

48. $g(t) = -t^2 - 3t + 3$

49. $h(x) = 2x^3 - 18x$

50. $f(r) = 3r^3 + 16r$

51. $g(x) = x\sqrt{8 - x^2}$

52. $g(x) = x^2\sqrt{5 - x}$

53. $f(x) = e^{2x} + e^{-x}$

54. $f(x) = x \ln x$

55. $f(x) = x^2 \ln x$

56. Represente graficamente as equações abaixo seguindo os passos do procedimento para construção de gráficos dados em aula. Inclua as coordenadas de quaisquer pontos extremos e absolutos locais e pontos de inflexão.

(a) $y = x^2 - 4x + 3$

(b) $y = x^3 - 3x + 3$

(c) $y = (x - 2)^3 + 1$

(d) $y = 4x^3 - x^4$

(e) $y = x + sen(x)$, $0 \leq x \leq 2\pi$

(f) $y = sen(x)\cos(x)$, $0 \leq x \leq \pi$

(g) $y = \ln(3 - x^2)$

(h) $y = e^x - 2e^{-x} - 3x$

(i) $y = \ln(\cos(x))$

(j) $y = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$

57. Esboce o gráfico das funções racionais.

   (a) $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

   (b) $y = \dfrac{x^2}{x + 1}$

58. Use a regra de l'Hôpital para determinar os limites abaixo.

   (a) $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{x - 2}{x^2 - 4}$

   (b) $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{sen(5t)}{2t}$

   (c) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{\ln x - sen(\pi x)}$

   (d) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x + 1)}{\log_2 x}$

   (e) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(e^x - 1)}{\ln x}$

   (f) $\displaystyle\lim_{t \to \infty} \frac{e^t + t^2}{e^t - t}$

   (g) $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} x^{1/(1-x)}$

   (h) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

   (i) $\displaystyle\lim_{x \to 0} (e^x + x)^{1/x}$

   (j) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} x^x$

59. Prove que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$$

para qualquer inteiro positivo n. Isso mostra que a função exponencial tende mais rapidamente a infinito que qualquer potência de x.

60. Prove que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0$$

para todo número $p > 0$. Isso mostra que a função logaritmo tende a infinito mais vagarosamente que qualquer potência de x.

61. Ilustre a Regra de L'Hôpital fazendo os gráficos de $f(x)/g(x)$ e $f'(x)/g'(x)$ próximo de $x = 0$, para ver que essas razões têm o mesmo limite quando $x \to 0$. Calcule também o valor exato do limite.

   (a) $f(x) = e^x - 1$, $g(x) = x^3 + 4x$

   (b) $f(x) = 2x \sin x$, $g(x) = \sec x - 1$

62. Encontre o ponto sobre a parábola $y^2 = 2x$ mais próximo de $(1, 4)$.

63. Uma caixa com uma base quadrada e sem tampa tem volume de $32.000cm^3$. Encontre as dimensões da caixa que minimizam a quantidade de material usado.

64. Se $1.200cm^2$ de material estiverem disponíveis para fazer uma caixa com uma base quadrada e sem tampa, encontre o maior volume possível da caixa.

65. Um fazendeiro quer uma cerca em um lote retangular de terra adjacente à parede norte de seu celeiro. Nenhuma cerca é necessária ao longo do celeiro e a cerca ao longo do lado oeste do lote é compartilhada com um vizinho que vai dividir o custo daquela parte da cerca. Se a cerca custa $30 por metro inear para instalar e o fazendeiro não está disposto a pagar mais do que $1.800, encontre as dimensões do lote que englobaria a maior área.

66. Se o fazendeiro do exercício anterior quiser engloar 150 metros quadrados de terra, que dimensões minimizarão o custo da cerca?

67. Se os dois lados iguais de um triângulo isósceles têm comprimento a, encontre o comprimento do terceiro lado que maximize a área do triângulo.